ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 20 | Februar 1940 | Heft 1

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. K.-H. Thiriot: Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes	1
K. Federhofer: Der senkrecht zu seiner Ebene schwingende Kreisbogenträger mit I-Querschnitt	13
R. Moufang: Das plastische Verhalten von dünnwandigen Rohren unter statischem Innendruck	24
Fr. A. Willers: Eigenschwingungen gedrückter Kreisplatten	37
M.-P. Geppert: Über eine Klasse von zweidimensionalen Verteilungen	45
U. Graf: Die Projektion bewegter Bilder auf gewölbte Schirmflächen	50
Kleine Mitteilungen. K. Wieghardt: Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt	58
Th. Pöschl: Über die Anlage von Fluchtlinientafeln	59
R. Müller: Über die partielle Ableitung der Besselschen Funktionen nach ihrem Parameter	61
Buchbesprechungen. Timoshenko: 60th Anniversary Volume. — Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik. — Prüfer: Projektive Geometrie. — Weiß: Punktreihengeometrie. — Berger: Mathematik der Lebensversicherung. — Kowalewski: Der Keplersche Körper und andere Bauspiele. — Fitting: Panmagische Quadrate und magische Sternvielecke. — Weiter eingegangene Bücher	62
Nachrichten	64

HAUPTAUFSÄTZE

Über die laminare Anlaufströmung einer Flüssigkeit über einem rotierenden Boden bei plötzlicher Änderung des Drehungszustandes[1].

Von *Karl-Hans Thiriot* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Einleitung. Aufgabe der Arbeit ist die theoretische und experimentelle Untersuchung der Grenzschichtvorgänge in einer Flüssigkeit, die sich auf einer rotierenden ebenen Scheibe befindet. Es werden speziell die Vorgänge beim plötzlichen Ingangsetzen und plötzlichen Stillsetzen der Scheibe untersucht. Diese Vorgänge, bei denen sogenannte Sekundärströmungen auftreten, haben mit meteorologischen Strömungsvorgängen, den sogenannten Zyklonen und Antizyklonen, eine gewisse Verwandtschaft. Die Untersuchungen wurden durchgeführt im Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung zu Göttingen und angeregt von Herrn Professor Prandtl, dem ich für die Erlaubnis zur Benutzung der Einrichtungen des erwähnten Instituts und seine mannigfachen Ratschläge zu großem Danke verpflichtet bin. Dank schulde ich auch Herrn Professor Tollmien für mancherlei Hinweise in der Theorie des Problems. Die Versuche wurden durchgeführt im rotierenden Laboratorium des erwähnten Instituts, kurz Karussell genannt, in dem der Beobachter mitrotiert, siehe Bild 1 (vgl. L. Prandtl [1] und H. Fette [2][2]). Die genauere Beschreibung der Versuchseinrichtung erfolgt im experimentellen Teil.

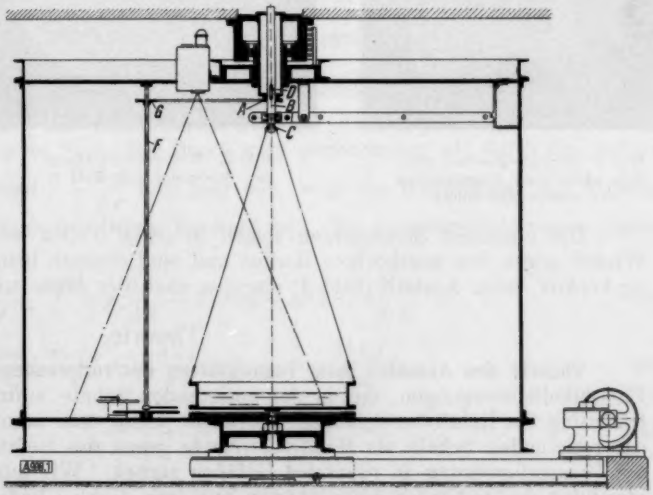


Bild 1. Karussell mit Versuchseinrichtung.

[1] Dissertation der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen.

[2] Das Schrifttumsverzeichnis befindet sich am Schluß der Arbeit.

Qualitative Betrachtung. Betrachtet ein mitrotierender Beobachter die Flüssigkeit in einer Schale beim Anlauf, so wird er feststellen, daß die Teilchen im Innern der Flüssigkeit, also außerhalb der Grenzschicht, entgegengesetzt rotieren. In Wirklichkeit ruht die Flüssigkeit, und der Beobachter dreht sich. Die durch eingestreute Farbkriställchen sichtbar gemachten Stromlinien sind demnach konzentrische Kreise. In der Grenzschicht jedoch werden die Verhältnisse sehr bald anders. In unmittelbarer Nähe des Bodens bildet sich eine proportional $\sqrt{\nu t}$ wachsende Grenzschicht aus, und der Überschuß der Zentrifugalbeschleunigung über die Coriolisbeschleunigung bewirkt eine Ablenkung der Flüssigkeitsteilchen nach außen. Infolge der Zähigkeitswirkungen der Flüssigkeit wird sich der Vorgang in der Schale so lange fortsetzen, bis die ganze Flüssigkeit mitgenommen wird und mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotiert wie die Schale.

Bei plötzlicher Bremsung der bis dahin gleichförmig rotierenden Schale, die in relativer Ruhe mitrotierende Flüssigkeit enthält, erfahren die Teile im Inneren zunächst keine Ablenkung. Die Rotationsbewegung der Teilchen in der bodennahen Grenzschicht wird durch die Reibung abgebremst. Dadurch wird das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und dem Druckgefälle zum Mittelpunkt hin in dem Sinne gestört, daß in der Grenzschicht die Zentrifugalkraft abgeschwächt ist und daher das Überwiegen des Druckfeldes ein Hereinströmen zur Rotationsachse bewirkt.

Derartige Strömungen lassen sich sichtbar machen, indem man kleine Kriställchen von einer Substanz, die in Wasser eine stark gefärbte Lösung liefert, in das Versuchsbecken streut. Jedes Kriställchen erzeugt dann eine Farbfahne. Es ist dabei allerdings zu beachten, daß die Farbfahnen bei nichtstationären Strömungen keine Stromlinien sind. Nach L. Prandtl nennt man sie Streichlinien, vgl. etwa Prandtl-Tietjens Bd. I, S. 68. Die älteren Teile der Farbfähnchen gehörten zu früheren Strömungsrichtungen. Deshalb sind für die Strömungsrichtung zu einem Zeitpunkt nur die zuletzt entstandenen Fahnenteile unmittelbar am Kristall maßgebend. Solche Strömungen sind mittels eines Filmapparates aufgenommen worden. Bild 2 bis 4 zeigen Vergrößerungen derartiger Aufnahmen. Bild 2 gibt die Strömung unmittelbar nach dem plötzlichen Ingangsetzen wieder und zeigt Stromlinien, die nahezu konzentrische Kreise darstellen. Bild 3 zeigt einen späteren Zeitpunkt. Die Farbfahnen weisen deutlich nach auswärts; die durch die zuletzt entstandenen Elemente gezogenen Linien sind unverkennbar logarithmische Spiralen. Bild 4 stellt ein Bild aus der Strömung nach dem Abstoppen der vorher gleichförmig rotierenden Schale dar. Die Strömung geht hier nach der Mitte zu.

Bild 2. Strömung sofort nach dem plötzlichen Ingangsetzen der rotierenden Schale.

Bild 3. Weiterentwicklung der Strömung von Bild 2.

Bild 4. Strömung nach dem plötzlichen Stillsetzen der rotierenden Schale.

Die einzelnen Streichlinien zeigen in ihren Teilen verschiedenen Alters verschiedene Winkel gegen den zugehörigen Radius und sind deshalb beim Anlauf (Bild 3) nach der Mitte zu konkav, beim Auslauf (Bild 4) dagegen nach der Mitte zu konvex.

Theorie.

Theorie des Anlaufes beim Ingangsetzen des rotierenden Bodens. Zur Untersuchung der Flüssigkeitsbewegungen, die in der rotierenden Schale auftreten, machen wir von der Betrachtung der Relativbewegungen Gebrauch. Sieht man nämlich die Flüssigkeitsbewegung in der rotierenden Schale als Relativbewegung gegen das Gefäß an, so führt man die Aufgabe auf Wasserbewegung in ruhenden Gefäßen zurück. Wir müssen aber dann die Differentialgleichung der reibenden Flüssigkeiten ergänzen durch Glieder, die das Wirken der Coriolis-

und Zentrifugalkräfte wiedergeben. In Vektorform lautet die Navier-Stokessche Differentialgleichung im relativen System:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_r}{\partial t} + \mathfrak{v}_r \circ \nabla \mathfrak{v}_r + \omega \times (\omega \times \mathfrak{s}) + 2(\omega \times \mathfrak{v}_r) = \mathfrak{g} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathfrak{v}_r$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}_r = 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung).}$$

Dabei ist $\mathfrak{v}_r$ die Relativgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, $\mathfrak{s}$ der Radiusvektor zu dem betrachteten Punkt, ω der Drehvektor, $\omega \times (\omega \times \mathfrak{s})$ die Zentrifugalbeschleunigung, $2(\omega \times \mathfrak{v}_r)$ die Coriolisbeschleunigung, $\mathfrak{g}$ die Beschleunigung der Erdschwere, die aber bei uns vernachlässigt werden kann, da wir ohne freie Oberfläche rechnen. $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ ist die kinematische Zähigkeit und $\nu \Delta \mathfrak{v}_r$ das Reibungsglied. Wir schreiben obige Gleichung in Komponentendarstellung und zwar in Polarkoordinaten hin und erhalten

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2\omega v_\varphi - \omega^2 r = \\ &- \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + 2\omega v_r = \\ &- \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \ldots \quad (3),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \quad \ldots \quad (4).$$

Wir wollen die Flüssigkeitsbewegung studieren, die sich einstellt, wenn man eine mit ruhendem Wasser gefüllte zylindrische Schale von unbegrenzter Höhe und unbegrenztem Durchmesser plötzlich in Drehung versetzt und von $t = 0$ an auf konstanter Geschwindigkeit hält. v. Kármán [3] hat auf Grund des Impulssatzes eine Rechnung durchgeführt, in der er das stationäre Problem der rotierenden Scheibe vom nichtrotierenden Außenraum aus betrachtet. Cochran [4] führte dasselbe Problem genauer durch mit Hilfe von Rechnungen nach Art der Blasiusschen Grenzschichtrechnung[3]). Bei unserem instationären Problem des Drehstoßes wird im ersten Augenblick die Flüssigkeit in Ruhe bleiben, sodann aber unter der Wirkung der Reibungs- und Trägheitsglieder eine Grenzschicht von Flüssigkeit, die von der Scheibe mitgenommen wird, entstehen. Wenden wir in unseren Gleichungen die Vernachlässigungen an, die uns die Überlegungen der Prandtlschen Grenzschichttheorie gestatten (siehe Prandtl [5], Blasius [6]), so kommen von den Reibungsgliedern nur noch $\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$ bzw. $\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}$ in Betracht. Ferner fällt Gl. (3) als belanglos weg. v_z erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung. Berücksichtigen wir, daß bei unserem Problem Achsensymmetrie herrscht, so werden alle Ableitungen nach φ zu Null. Der Druck wird angenommen als durch die „äußere Strömung" eingeprägt. Das Glied $-\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r}$ fällt hier fort, weil die Hauptmasse der Flüssigkeit in Ruhe verbleibt und sonach der Druck konstant ist. Die Ausgangsgleichungen lauten dann vereinfacht:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - 2\omega v_\varphi - \omega^2 r = \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad \ldots \quad (5),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + 2\omega v_r = \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \quad \ldots \quad (6),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

[3]) Weiterhin wird demnächst eine Arbeit von U. T. Boedewadt erscheinen, die das Problem des stationären Auslaufs behandelt.

Wir führen jetzt nach Blasius (Dissertation S. 22) als dimensionslose Variable ein

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$$

und machen für v_r bzw. v_φ den Ansatz

$$v_\varphi = \omega r \{f_0(\eta) + (\omega t)^2 f_2(\eta) + \cdots\} \quad (8),$$

$$v_r = \omega r \{\omega t f_1(\eta) + (\omega t)^3 f_3(\eta) + \cdots\} \quad (9).$$

Im Flüssigkeitsinneren ist dauernd $v_\varphi = -\omega r$, $v_r = 0$, in der Grenzschicht also in 1. Näherung $v_\varphi = \omega r f_0(\eta)$. Die Coriolisbeschleunigung $2\omega v_\varphi$ erzeugt in der Grenzschicht ein mit ωt wachsendes v_r, die Coriolisbeschleunigung $-2\omega v_r$ weiter einen mit $(\omega t)^2$ wachsenden Anteil zu v_φ usw. Die Randbedingungen werden

$$\text{für } z = 0 \quad v_r = v_z = v_\varphi = 0, \qquad \text{für } z = \infty \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = -\omega r.$$

Erste Näherung. Wenn man die Ausdrücke von Gl. (8) und (9) in (5) bzw. (6) einsetzt und nach Potenzen von ωt ordnet, so findet man, daß der erste Einfluß bei der plötzlichen Anlaufströmung auf die Komponente v_φ entfällt, die sich in erster Näherung auf Grund der Reibung bemerkbar macht. Wir erhalten nämlich als Differentialgleichung

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}.$$

Die Lösung ist aus der Theorie der Wärmeleitungsgleichung bekannt und lautet:

$$f_0 = \text{const} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \quad \text{(s. Bild 5)}.$$

Damit für $z = \infty$ $v_\varphi = -\omega r$ wird, ist $\text{const} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ zu setzen. Damit wird die Komponente v_φ in erster Näherung

$$v_{\varphi_1} = -\frac{2\omega r}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Zur Bestimmung der ersten Näherung der Geschwindigkeitskomponente v_r berücksichtigen wir die Glieder mit ωt in Gl. (5) und erhalten eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für $f_1(\eta)$:

$$f_1'' + 2\eta f_1' - 4 f_1 = -4 f_0^2 - 8 f_0 - 4 = -\frac{16}{\pi}\left\{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 + \frac{16}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - 4 \quad (10).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen und der der inhomogenen Gleichung. Die Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir auf Grund der von Blasius in seiner Dissertation S. 25 angegebenen Methode. Er findet dort für das eine partikuläre Integral der homogenen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} f_{n,1} = &\sum_{\mu=0}^{n} \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots 3\cdot 1} \eta^{2\mu} \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^{\mu+\nu} \frac{2^{\nu-1}\binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots(2\mu-2\nu+1)} \right\} \eta^{2\nu-1} \cdot e^{-\eta^2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

und für das andere

$$f_{n,2} = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{2^\mu \binom{n}{\mu}}{(2\mu-1)\ldots 3\cdot 1} \eta^{2\mu} \quad (12),$$

wo n die Anzahl der Näherungen bedeutet. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach:

$$f_{1,\text{homogen}} = \alpha(2\eta^2+1) + \beta\left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2+1)\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right],$$

worin α und β die Integrationskonstanten sind, abhängig von der Wahl der Integrationsgrenzen. Was von dem inhomogenen Bestandtteil der Differentialgleichung zu der Lösung

hinzukommt, bestimmen wir mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten (s. Frank — v. Mises [7]). Es besteht die Aufgabe, die Gleichung

$$f_1 = h_2 \int_0^\eta \frac{h_1 g}{h_1 h_2' - h_2 h_1'}\, d\eta - h_1 \int_0^\eta \frac{h_2 g}{h_1 h_2' - h_2 h_1'}\, d\eta + \alpha h_1 + \beta h_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

aufzulösen, wobei h_1 und h_2 die Lösungen der homogenen Gleichung darstellen und g der inhomogene Bestandteil der Differentialgleichung ist. Der Ausdruck $h_1 h_2' - h_2 h_1'$ muß dabei ein Fundamentalsystem bilden, d. h. ungleich Null sein. Bei unserer Differentialgleichung (10) ist das der Fall. Es ist dort

$$h_1 h_2' - h_2 h_1' = 2\, e^{-\eta^2}.$$

Nach der Auswertung der beiden Integrale der Gl. (13) finden wir nach längerer Rechnung für das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$f_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \eta^2 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta\, e^{-\eta^2} - 2\eta^2$$

$$- \frac{8}{\pi} \eta^2 \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{8}{\pi} \eta\, e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + \alpha h_1 + \beta h_2,$$

wobei α und β noch durch die Grenzbedingungen zu bestimmen sind. Es ist, da $f_1 = 0$ für $\eta = 0$ und $f_1 = 0$ für $\eta = \infty$, $\alpha = \frac{2}{\pi}$ und $\beta = -\frac{4}{\pi^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Wir bekommen dann als Lösung unseres Problems

$$f_{1,\,\text{Anlauf}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta^2 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta\, e^{-\eta^2} - \frac{4}{\pi^{3/2}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

$$- \frac{8}{\pi} \eta\, e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\pi} \eta^2 \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + 2\eta^2 \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) + \frac{2}{\pi}.$$

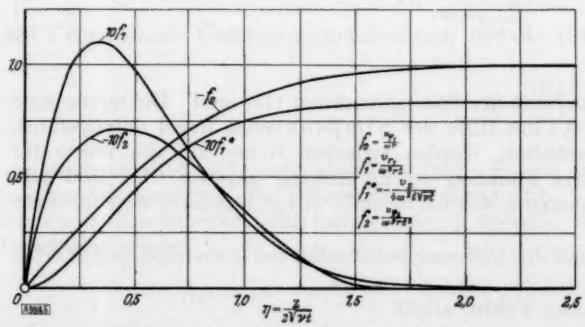


Bild 5. Geschwindigkeitsfunktionen beim plötzlichen Ingangsetzen der Schale.

Aus Bild 5 ersehen wir den Verlauf der Funktion. Im Anhang ist sie tabuliert. v_z finden wir aus der Kontinuitätsgleichung (7). Wir setzen

$$v_z = -4\,\omega^2\, t \sqrt{\nu t} \int_0^\eta f_1(\eta)\, d\eta$$

$$= -4\,\omega^2\, t \sqrt{\nu t}\, f_1^*(\eta)$$

und erhalten

$$f_1^* = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta^3 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \eta^2 e^{-\eta^2} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) e^{-\eta^2}$$

$$- \frac{4}{\pi^{3/2}} \eta \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{3\pi} \eta^3 \left\{ \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right\}^2 - \frac{8}{3\pi} \eta^2 e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{3\pi} \eta\, e^{-2\eta^2}$$

$$+ \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{3\pi} \int_0^\eta e^{-2\eta^2} d\eta + \left(\frac{4}{3\pi} - \frac{2}{3}\right) \eta^3 + \frac{2}{\pi} \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right).$$

Auch diese Funktion ist im Anhang tabuliert. Ihren Verlauf gibt Bild 5.

Zweite Näherung. Eine Verbesserung des Wertes von v_φ erhalten wir, wenn wir mit $v_\varphi = v_{\varphi_1} + v_{\varphi_2}$ und den erhaltenen v_{r_1} und v_z in unsere Ausgangsgleichung (6) eingehen, wobei für v_{φ_2} gemäß Gl. (8)

$$v_{\varphi_2} = \omega^3 r t^2 f_2(\eta)$$

eingesetzt wird. Als Differentialgleichung ergibt sich dadurch, wenn man die Glieder mit $\omega^2 t^2$ berücksichtigt,

$$f_2'' + 2\eta f_2' - 8 f_2 = 8 f_1 f_0 - 16 f_0' f_1^* + 8 f_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Das ist wiederum eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren homogene Lösung lautet:

$$f_{2,\,\text{homogen}} = \alpha\left(\eta^4 + 3\eta^2 + \frac{3}{4}\right) + \beta\left[\left(\eta^4 + 3\eta^2 + \frac{3}{4}\right)\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{5}{4}\eta e^{-\eta^2} + \frac{1}{2}\eta^3 e^{-\eta^2}\right] \quad . \quad (15)$$

mit den Integrationskonstanten α und β. Der das Fundamentalsystem kennzeichnende Ausdruck ist gleich $\frac{3}{2} e^{-\eta^2}$.

Infolge der Unzahl der inhomogenen Glieder der Differentialgleichung (14), wenn man für f_1, f_0, f_0' und f_1^* die entsprechenden Funktionen einsetzt, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die Integrale der analog Gl. (13) angesetzten Lösungsfunktion numerisch auszuwerten. Wir erhalten

$$f_2 = \frac{2}{3}\left\{\left[h_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}\left(\frac{5}{4}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right)\right]\right.$$

$$\int_0^\eta \frac{h_1\left[8 f_1\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right) + 16 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} f_1^*\right]}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}} d\eta$$

$$\left. - h_1 \int_0^\eta \frac{\left[h_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}\left(\frac{5}{4}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right)\right] \cdot \left[8 f_1\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right) + 16 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} f_1^*\right]}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}} d\eta \right\}$$

$$+ \alpha h_1 + \beta h_2,$$

wo h_1 und h_2 die beiden Funktionsbestandteile der Lösungsfunktion (15) sind. Die numerische Integration wurde in Schritten von $h = 0{,}1$ mit Hilfe der Simpsonschen Regel durchgeführt. Um auch einen Wert für $\eta = 0{,}1$ zu erhalten, wurden zwischen 0 und 0,1 die Werte für $\eta = 0{,}05$ benutzt. Eine Zahlentafel dieser Funktion ist im Anhang gegeben. Ihr Bild gibt Bild 5. Die Funktionswerte für die größeren η werden deshalb etwas ungenau, weil für diese $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$ nahe an 1 herankommt und die Differenz bekanntlich bei naheliegenden Werten vielstelliger Zahlen einen prozentual hohen Fehler erhält.

Theorie der Strömung beim plötzlichen Abstoppen des sich drehenden Bodens. Es wird vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit zu Anfang in relativer Ruhe mit dem Boden mitrotiert hat. Die Strömung, die nach dem Abstoppen des Bodens eintritt, werde vom absoluten System aus betrachtet.

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

unter den Randbedingungen

für $z = 0$; $v_r = v_\varphi = v_z = 0$; für $z = \infty$; $v_r = 0$; $v_\varphi = \omega r$.

Bei der Aufstellung der Gleichungen ist bereits berücksichtigt, daß wir ein dreh-symmetrisches Problem haben. Es blieben deshalb alle Glieder, die die Ableitung nach φ enthalten, außer acht. Ebenso fällt die die Komponente v_z behandelnde Gleichung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen als belanglos weg. Mit $v_r = 0$ und $v_\varphi = \omega r$ wird $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r$.

Erste Näherung. Wir gehen nun ähnlich vor wie bei der Betrachtung des Anlaufs und verwenden wieder die Ansätze (8) und (9). Da wir vor allem die Vorgänge in unmittelbarer Nähe des Bodens betrachten, wo in erster Linie die Reibungswirkungen zur Geltung kommen, erhalten wir v_φ in erster Näherung aus

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} \text{ (Wärmeleitungsgleichung)}$$

und als Lösung unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$v_{\varphi_1} = \frac{2\omega r}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \quad . \quad . \quad (19),$$

wobei

$$f_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

und η wieder gleich $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$ ist. Das Bild von $f_{0,\,\text{Auslauf}}$ ist dasselbe wie beim Anlauf (s. Bild 6), nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

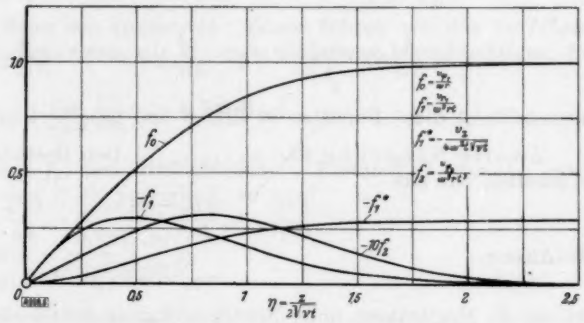


Bild 6. Geschwindigkeitsfunktionen beim plötzlichen Stillsetzen der Schale.

Für v_{r_1} erhalten wir die Ausgangsgleichung

$$\frac{\partial v_{r_1}}{\partial t} - \frac{v_{\varphi_1}^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_{r_1}}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

v_{φ_1} entnehmen wir der Gl. (19) und für v_{r_1} machen wir mit Hilfe von Gl. (9) den Ansatz

$$v_{r_1} = \omega^2 r t f_1(\eta).$$

Auf Grund dieser Überlegungen bekommen wir die Differentialgleichung

$$f_1'' + 2\eta f_1' - 4 f_1 = 4 - \frac{16}{\pi}\left\{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

aus der partiellen Differentialgleichung (20). Sie ist wieder linear und inhomogen und von zweiter Ordnung wie die Differentialgleichung (10). Der homogene Teil derselben stimmt sogar mit dem unserer Differentialgleichung überein. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet also wieder

$$f_{1,\,\text{homogen}} = \alpha(2\eta^2 + 1) + \beta\left[\eta e^{-\eta^2} + (2\eta^2 + 1)\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right].$$

Die unter Berücksichtigung der Randbedingungen gefundene Lösung der Differentialgleichung wird

$$f_{1,\,\text{Auslauf}} = -\frac{8}{\pi}\eta^2\left\{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta\right\}^2 - \frac{8}{\pi^{3/2}}\eta^2\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

$$-\frac{4}{\pi^{3/2}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{8}{\pi}\eta e^{-\eta^2}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{\pi}e^{-2\eta^2} - \frac{4}{\pi^{3/2}}\eta e^{-\eta^2} + 2\eta^2\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}.$$

Die Zahlentafel dieser Funktion findet sich im Anhang. Ihr Bild gibt Bild 6. Im negativen Vorzeichen der f_1-Werte tritt das Hereinströmen der Flüssigkeitsmassen wie in Tiefdruckgebieten in Erscheinung. Bemerkenswert ist, daß das Hereinströmen der Flüssigkeitsmassen beim Auslauf mit viel größerer Geschwindigkeit erfolgt als das Hinausströmen beim Anlauf.

XUM

v_z berechnen wir wieder aus der Kontinuitätsgleichung und erhalten dort

$$v_z = -4\,\omega^2\, t\sqrt{\nu\, t}\int_0^\eta f_1(\eta)\,d\eta = -4\,\omega^2\, t\sqrt{\nu\, t}\, f_1^*(\eta).$$

f_1^* ist erhältlich durch einfache Integration. Es ergibt sich der geschlossene Ausdruck

$$f_1^* = -\frac{8}{3\pi}\eta^3\left\{\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right\}^2 - \frac{8}{3\pi^{3/2}}\eta^3\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta - \frac{4}{\pi^{3/2}}\eta\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$-\frac{8}{3\pi}\int_0^\eta e^{-2\eta^2}\,d\eta + \left(\frac{4}{3\pi}+\frac{2}{3}\right)\eta^3 + \frac{2}{\pi}\eta - \frac{8}{3\pi}\eta^2 e^{-\eta^2}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$+\frac{4}{3\pi}e^{-\eta^2}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta - \frac{4}{3\pi^{3/2}}\eta^2 e^{-\eta^2} - \frac{4}{3\pi^{3/2}}e^{-\eta^2} - \frac{2}{3\pi}\eta\, e^{-2\eta^2} + \frac{4}{3\pi^{3/2}}.$$

Dargestellt ist diese Funktion in Bild 6 und tabelliert im Anhang.

Zweite Näherung für v_φ, Auslauf. Den Bestandteil v_{φ_2} der zweiten Näherung für v_φ erhalten wir aus

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}.$$

Der Ansatz

$$v_{\varphi_2} = \omega r\cdot(\omega t)^2\cdot f_2(\eta)$$

gibt uns die Möglichkeit, unter Berücksichtigung der Glieder mit $(\omega t)^2$ die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in eine gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung umzuwandeln. Es wird

$$f_2'' + 2\eta f_2' - 8f_2 = 8f_1 f_0 - 16 f_0' f_1^* = g.$$

Für die homogene Lösung erhalten wir wieder nach dem bei Blasius angewandten Verfahren

$$f_{2,\,\text{homogen}} = k_1\left(\eta^4+3\eta^2+\frac{3}{4}\right) + k_2\left[\left(\eta^4+3\eta^2+\frac{3}{4}\right)\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta + \frac{5}{4}\eta\, e^{-\eta^2} + \frac{1}{2}\eta^3 e^{-\eta^2}\right],$$

wo k_1 und k_2 die Integrationskonstanten sind. Das Fundamentalsystem ist wieder

$$h_1 h_2' - h_2 h_1' = \frac{3}{2}e^{-\eta^2}, \qquad \text{also} \neq 0.$$

Es existiert somit eine Lösung auf Grund der Formel (13). Es ist

$$f_2 = \frac{2}{3}\left\{h_2\int_0^\eta \frac{h_1 g}{e^{-\eta^2}}\,d\eta - h_1\int_0^\eta \frac{h_2 g}{e^{-\eta^2}}\,d\eta\right\} + k_1 h_1 + k_2 h_2.$$

Leider müssen wir wieder feststellen, daß es zu langwierig wäre, die Integrationen rechnerisch durchzuführen. Es ist deshalb das Verfahren der numerischen Integration mit Hilfe der Simpsonschen Regel vorzuziehen. Das wurde angewandt auf dieselbe Weise wie S. 6. Bild 6 zeigt die Kurve der Lösungsfunktion. Ihre Werte sind zusammengestellt in der Zahlentafel im Anhang.

Um die Steigung von f_2 im Nullpunkt zu erhalten, insbesondere zur Berechnung der Stromlinien, wurde der inhomogene Teil unserer Differentialgleichung mit Hilfe der Reihenentwicklung für $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta$ und $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}$ (Jahnke-Emde [8]) für kleine η umgeformt. Es wird dann

$$f_2'' + 2\eta f_2' - 8f_2 = \frac{16}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{3}\eta^3 - \frac{20}{3\pi^{3/2}}\eta^4 + \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5\pi}\right)\eta^5 + \frac{44}{5\pi^{3/2}}\eta^6 - \left(\frac{7}{15}+\frac{1588}{315\pi}\right)\eta^7\right].$$

Diese Differentialgleichung hat unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Lösung

$$f_2 = 2k_2\eta + 2k_2\eta^3 + \left(\frac{k_2}{5}+\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\right)\eta^5 - \frac{32}{9\pi^2}\eta^6 + \left(\frac{8}{35\sqrt{\pi}} - \frac{32}{105\pi^{3/2}} - \frac{k_2}{105}\right)\eta^7 + \ldots,$$

wobei

$$k_2 = -0{,}0229.$$

Zur Berechnung der Stromlinien. Die Differentialgleichung der Stromlinie lautet

$$\frac{dr}{r\,d\varphi}=\frac{v_r}{v_\varphi}.$$

Der Vergleich mit den vorangehenden Formeln zeigt, daß v_r/v_φ unabhängig von r ist. Für $z=\text{const}$ ergibt sich also $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}=\text{const}=m$, was durch Integration $r=e^{m\varphi}$ liefert (logarithmische Spirale). Hier ist zunächst $\frac{v_r}{v_\varphi}=m$ für verschwindend kleine η zu ermitteln, um die Stromlinienrichtung der Bodenschicht zu erhalten, die sich durch Versuche einfach nachprüfen läßt. Da der Quotient $\frac{v_r}{v_\varphi}$ für $\eta=0$ eine unbestimmte Form ergibt $\left(\frac{0}{0}\right)$, differenziert man Zähler und Nenner und bildet dann den Grenzwert. Zuerst führen wir das Verfahren für den Anlauf durch. Wir erhalten dort, wenn wir die erste Näherung berücksichtigen, für

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{v_{r_1}}{v_{\varphi_1}}=-0{,}72676\,\omega t.$$

Nehmen wir das tabellarisch gegebene f_2, den dimensionslosen Bestandteil von v_{φ_2}, noch hinzu, differenzieren zur Gewinnung von $f_2'(0)$ numerisch, so wird

$$m=-\frac{0{,}72676\,\omega t}{1+0{,}23\,(\omega t)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

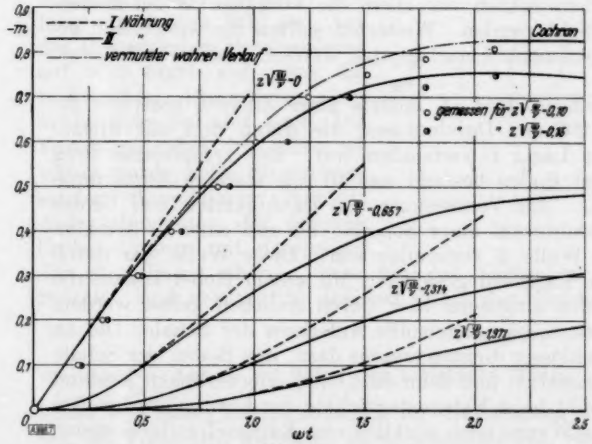


Bild 7.

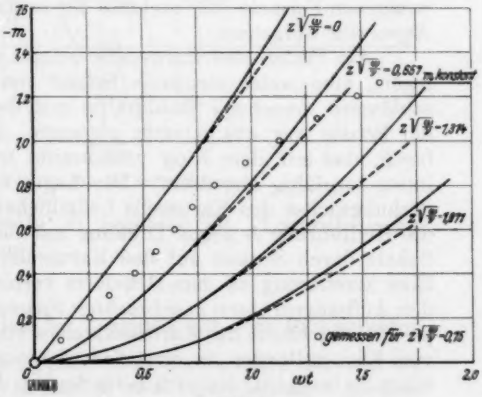


Bild 8.

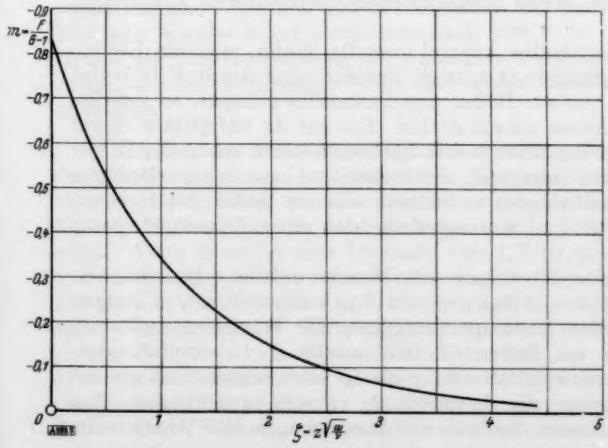


Bild 9.

Bild 7. Spiralensteigung im Verlauf der Zeit nach dem plötzlichen Ingangsetzen der rotierenden Scheibe bei verschiedenen Höhen z.

Bild 8. Spiralensteigung im Verlauf der Zeit nach dem plötzlichen Stillsetzen der rotierenden Scheibe bei verschiedenen Höhen z.

Bild 9. Abhängigkeit der Spiralensteigung von der Höhe nach den Formeln von Cochran.

Im Minus-Zeichen tritt die Rechtsablenkung der Flüssigkeitsteilchen beim Hinausströmen in Erscheinung. Für das Studium der Vorgänge in größerer Höhe ist die Dimensionslose $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ maßgebend. Bild 7 zeigt für verschiedene dieser Werte den Verlauf von m mit ωt. Die gestrichelten Kurven geben die erste Näherung wieder, die ausgezogenen die zweite.

Entsprechend wird beim Problem des plötzlichen Abstoppens der Drehung

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{v_{r_1}}{v_{\varphi_1}} = -1{,}2732\,\omega t.$$

Unter Hinzunahme des Bestandteiles v_{φ_2} der zweiten Näherung, wobei diesmal die Lösung von f_2 für kleine η benutzt wurde,

$$m = -\frac{1{,}2732\,\omega t}{1 - 0{,}045836\,(\omega t)^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Bild 8 gibt uns die Abhängigkeit der m von ωt, ebenfalls für verschiedene $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$. Ersichtlich ist sowohl bei Bild 7 wie Bild 8, daß bei größeren $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$-Werten m immer kleiner wird. Man vergleiche auch Bild 9, wo die Abhängigkeit der Spiralensteigung von der dimensionslosen Höhe nach Rechnungen von Cochran für den stationären Anlauf dargestellt ist. Leider ist in den instationären Fällen, wie bereits erwähnt, die Rechnung weiterer Näherungen, die die Verfolgung der Kurven bis an die stationären Verhältnisse erlauben würde, zu mühsam.

Versuche.

Versuchseinrichtung. In den Versuchen sollten vor allem die Vorgänge in der Bodenschicht durch Strömungsbilder veranschaulicht werden. Weiterhin sollten die theoretisch gewonnenen Formeln (22) und (23) für m experimentell nachgeprüft werden. Dazu war folgende Apparatur aufgebaut.

Am Boden des Karussells befand sich (s. Bild 1), mittels eines Zapfens zentrisch gelagert, eine weißgestrichene Schale von 900 mm Durchmesser, die durch drei mit Spannschlössern versehene Stahldrähte mit dem Lager C verbunden war. Der zylindrische Ring der Schale war aus Silumin gegossen. Der Boden bestand aus 10 mm starkem Aluminiumblech, das mit dem Ring verschraubt war. Zur Vermeidung von Rauhigkeiten war beides innen sorgfältig abgedreht. Das Lager C ruhte auf einer Scheibe, die mit einer in der Umdrehungsachse des Karussells befindlichen Welle B verbunden war. Diese Welle war durch die Keilführung D gegen Drehung mit dem Karussell gesichert. Mit einem Hebel konnte die Schale durch Senken auf den Karussellboden aufgesetzt bzw. durch Anheben gelöst werden. Eine Arretierung an dem Hebelarm verhinderte das ungewollte Aufsetzen der Schale. Die an den Aufhängedrähten angebrachten Spannschlösser dienten erstens dazu, den Boden der Schale parallel der Ebene des Karussellbodens einzustellen und dann dazu, den erforderlichen Abstand vom Karussellboden zu erreichen, daß sowohl beim Heben der Schale der Karussellboden frei unter ihr wegglitt, als auch beim Senken die Wanne auch wirklich vom Karussell mitgenommen wurde. Um ein weiches Aufsetzen der Schale zu bewirken, wurden auf ein mit dem Karussellboden verschraubtes und mit Wasserwaage genau ausgerichtetes Sperrholzbrett Filzstreifen von 10 mm Stärke aufgeleimt.

Unter dem feststehenden Teil des Karussells, koaxial mit der Welle, war ein Kettenrad A angebracht, das über eine Kette ein gleiches G antrieb, das auf einer Achse F befestigt war. Dieses war wiederum an der Decke und am Boden des Karussells gelagert, so daß bei einer Drehung des Zimmers sich auch die Achse einmal drehte. Ein auf ihr befestigter Zeiger ließ die Drehung ablesen. Vom Standpunkt des außenstehenden Beobachters stand der Zeiger still, während er, vom rotierenden Karussell aus betrachtet, sich drehte, und zwar in gegenläufigem Sinne des Beobachters draußen. Um die Zeit ablesen zu können, war am Boden des rotierenden Zimmers ein Grammophonwerk befestigt und so eingestellt, daß einer Zeigerumdrehung eine Sekunde entsprach.

Zur Durchführung der Versuche wurde die Schale mit Wasser gefüllt. Die sich einstellende Strömung wurde, wie schon erwähnt, sichtbar gemacht durch Einstreuen von kleinen Kristallen von Agfa-Dunkelkammergrün oder Kaliumpermanganat, die bei ihrer Auflösung Farbfahnen ergaben und so die Vorgänge am Boden sichtbar machten. Es empfahl sich, mittels geeigneter Siebe solche Farbkörnchen auszuscheiden, die so klein waren, daß sie die Klarheit der Strömung störten, aber auch große, die die Strömung zu sehr beunruhigten. Am zweckmäßigsten erwiesen sich solche, bei denen die linearen Abmessungen der Kriställchen rd. 0,3 bis 0,5 mm betrugen.

Beobachtungsmethoden. Zur Veranschaulichung der Vorgänge in der Bodenschicht war zunächst eine photographische Methode angewandt worden. Zu dem Zweck befand sich mitrotierend an der Decke des Karussells ein Askania-Filmgerät. Des verhältnismäßig kurzen Gegenstandsabstandes wegen mußte ein Weitwinkelobjektiv gewählt werden. Und zwar benutzten wir „Elmar" 1 : 3,5, Brennweite 3,5 cm. Beleuchtet wurde von der Decke des Zimmers aus mit 3 Nitraphotlampen von je 500 Watt Leistung und der Filmtransport durch Elektromotor so betätigt und mittels eines Widerstandes eingestellt, daß etwa 18 Bilder pro Sekunde aufgenommen wurden. Als Färbesubstanz wurde Kaliumpermanganat oder auch Agfa-Dunkelkammergrün verwendet. Bild 2 bis 4 stellen Vergrößerungen von solchen Filmaufnahmen dar.

Da jedoch verhältnismäßig viele Kriställchen gebraucht werden, die sich bald lösen und die Bilder undeutlich machen, und da weiterhin die Kriställchen zur photographischen Wiedergabe ziemlich dick sein müssen und so nicht die Vorgänge in der unmittelbaren Bodenschicht zeigen — die Bilder gelten etwa für einen Wert von $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 1{,}25$, vgl. Bild 7 —, mußte diese Methode zur quantitativen Auswertung verlassen werden. Zur Nachprüfung der m-Beziehung erwies sich als zweckmäßiger folgende Methode.

In der Schale war in dem mit dem Rotationszentrum als Mittelpunkt eingezeichneten Polarkoordinatensystem senkrecht zu einem beliebigen Radius eines Koordinatenkreises eine Strecke derselben Länge wie der Radius eingetragen und mit einer Teilung versehen (s. Bild 10). Aus der theoretischen Untersuchung auf S. 9 ergab sich, daß die bodennahen Stromlinien logarithmische Spiralen sind. Die Farbfahnen sind, wie schon erwähnt wurde, keine Stromlinien sondern Streichlinien. Nur die Anfangstangenten der Streichlinien stimmen mit denjenigen der Stromlinien überein, was bei den Versuchen wohl zu beachten ist. Logarithmische Spiralen sind bekanntlich definiert durch die Gleichung

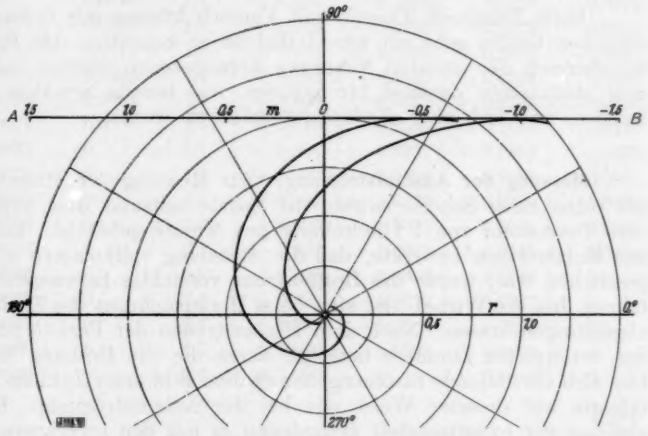


Bild 10. Anordnung für die m-Bestimmung.

$$r = e^{m\varphi},$$

wo $m = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi}$ ist. ψ ist dabei der konstante Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet und daher charakteristisch für die Steigung der Spirale. Um die Verhältnisse, wie sie bei den Versuchen vorliegen, zu veranschaulichen, sind in Bild 10 zwei logarithmische Spiralen mit den Steigungen $m = -0{,}5$ und $m = -1$ gezeichnet. Stimmt also z. B. die Richtung der logarithmischen Spiralen mit der Richtung der Geraden AB im Teilpunkt $-1{,}0$ überein, so läßt sich hieraus sofort entnehmen, daß hier $m = -1$ ist. Man hat also die Möglichkeit, auf Grund des Übereinstimmens der Anfangsrichtung der Farbfähnchen mit der Richtung der Geraden an einer bestimmten Stelle das m der zugehörigen logarithmischen Spirale unmittelbar abzulesen.

Messung der Anlaufströmung. Zur Messung der Strömung beim plötzlichen Ingangsetzen der Schale wurde bei stillstehendem Karussell mit Hilfe des oben erwähnten Hebels die wassergefüllte Schale vom Karussellboden abgehoben, nachdem festgestellt war, daß keinerlei Flüssigkeitsbewegung in der Schale herrschte. Sodann wurde das Karussell in Bewegung gesetzt. Wenn dasselbe eine Drehzahl von 1 Tour pro Minute erreicht hatte, wurden die Farbkörnchen eingestreut und die Arretierung des Hebels gelöst. Auf diese Weise trat die Schale plötzlich in die Rotation ein. Das sich nun entwickelnde, einem Hochdruckgebiet der Atmosphäre entsprechende Strömungsbild wurde gemessen, und zwar wurde mit der Stoppuhr jedesmal die Zeit vom Moment des Aufsetzens der Schale bis zu dem Moment, wo für einen bestimmten Teilstrich der Geraden die Anfangsrichtung der Farbfähnchen in die Richtung der Geraden fiel, bestimmt. Aufgetragen wurde dieses m abhängig von der Zeit, wobei die Zeit mit der Winkelgeschwindigkeit dimensionslos gemacht wurde (s. Bild 7). Wie wir auch auf Bild 2 sahen, bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen im ersten Moment auf Kreisbahnen,

XUM

d. h. hier ist $m = 0$. Sodann aber machen sich die Reibungskräfte in der Nähe des Bodens bemerkbar, und die Stromlinien nehmen unter dem Einfluß der Kräfte im relativen System die Gestalt logarithmischer Spiralen an. Deren Steigung nimmt rasch zu, bis sie einen konstanten Wert erreicht, der nach einiger Zeit zu $m = -0{,}8$ gefunden wurde. Das stellt eine gute Übereinstimmung mit der erwähnten Theorie von Cochran dar, aus dessen Tabelle unmittelbar am Boden im stationären Fall sich ein Wert von $m = -0{,}828$ errechnen läßt. Für zwei Kristalldicken, deren Farbfahnen einem mittleren Abstand z vom Gefäßboden entsprechend $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 0{,}1$ bzw. $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 0{,}15$ haben, wurden die Versuche durchgeführt. Bei den theoretischen Stromlinien hatte sich ergeben

$$m = \frac{\omega t f_1}{f_0 + (\omega t)^2 f_2},$$

was jedesmal für die verschiedenen $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ auszuwerten war.

Beim Vergleich Theorie mit Versuch können wir feststellen, daß die Übereinstimmung zwischen beiden sehr gut ist. Dabei ist zu beachten, daß für den Vergleich nur der Gültigkeitsbereich der zweiten Näherung herangezogen werden darf. Für größere ωt-Werte bis zum stationären Zustand hin müßten, wie bereits erwähnt, weitere Näherungen gerechnet werden, was sich aber als äußerst mühsam erweist.

Messung der Auslaufströmung. Zur Messung der Strömung beim plötzlichen Abstoppen der rotierenden Scheibe wurde die Schale mitsamt dem rotierenden Zimmer wiederum auf eine Tourenzahl von 1 Umdrehung pro Minute gebracht. Ein in die Schale gestelltes Kreuz aus Holzbrettern bewirkte, daß die Strömung vollkommen mitgenommen wurde. Wenn das geschehen war, wurde das Bretterkreuz vorsichtig herausgenommen und noch einige Zeit gefahren, bis die Wirbel, die sich beim Herausnehmen des Bretterkreuzes etwa gebildet hatten, abgeklungen waren. Nach dem Hineinstreuen der Farbkörnchen wurde dann die Notbremse des rotierenden Zimmers betätigt, durch die die Drehung in $^1/_2$ Sekunde abgestoppt wurde. Die sich einstellende Strömung ähnelt dem Bild einer Zyklone. Die Durchführung der Messung erfolgte auf dieselbe Weise wie bei der Anlaufströmung. Bild 8 zeigt uns die Gegenüberstellung der experimentell gefundenen m mit den errechneten. Auch hier ist wieder zuerst die Kreisbahn und dann das Größerwerden des m zu beobachten, das aber hier bis zu einem Wert von $-1{,}26$ emporklettert und dann konstant wird. Die Theorie für diesen Zustand ist, wie bereits erwähnt, in nächster Zeit von U. T. Boedewadt zu erwarten. Die Messung wurde hier durchgeführt für ein $z\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 0{,}15$.

Wir haben hier ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung, jedoch nicht ganz so gut wie beim Anlauf, was daran liegen dürfte, daß hier die Reihen schlechter konvergieren; und eine Berechnung weiterer Näherungen ist zu mühsam, wie bereits erwähnt wurde.

Zusammenfassung. Zur Berechnung der Grenzschicht über einer rotierenden Scheibe beim plötzlichen Anfahren und Abstoppen wurden die Grenzschichtgleichungen aufgestellt und diese nach der Blasiusschen Methode integriert. Die sich als Stromlinien ergebenden logarithmischen Spiralen wurden durch Versuche im rotierenden Laboratorium des Kaiser Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung zu Göttingen nachgeprüft.

Schrifttumsverzeichnis.

[1] L. Prandtl: Erste Erfahrungen mit dem rotierenden Laboratorium. Naturwiss. Bd. 14 (1926), S. 425.
[2] H. Fette: Strömungsversuche im rotierenden Laboratorium. Z. techn. Phys., Bd. 14 (1933), S. 257.
[3] Th. v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech., Bd. 1 (1921), S. 233.
[4] W. G. Cochran: The flow due to a rotating disc. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. (1934), S. 365.
[5] L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Intern. Mathematiker-Kongresses, Heidelberg 1904, S. 484.
[6] H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. f. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1.
[7] Frank-v. Mises: Differentialgleichungen der Physik. Bd. 1, Braunschweig 1930, S. 300.
[8] Jahnke-Emde: Funktionentafeln. Leipzig 1933, S. 97.

Funktionentafel I.

η	f_0, Anlauf	f_1, Anlauf	f_1^*, Anlauf	f_2, Anlauf
0,05	− 0,056	+ 0,0362	+ 0,0009	
0,1	− 0,113	+ 0,0639	+ 0,0035	− 0,0236
0,2	− 0,223	+ 0,0975	+ 0,0118	− 0,0437
0,3	− 0,329	+ 0,1099	+ 0,0219	− 0,0586
0,4	− 0,428	+ 0,1084	+ 0,0333	− 0,0675
0,5	− 0,521	+ 0,0984	+ 0,0436	− 0,0716
0,6	− 0,604	+ 0,0846	+ 0,0529	− 0,0705
0,7	− 0,678	+ 0,0692	+ 0,0606	− 0,0675
0,8	− 0,742	+ 0,0547	+ 0,0667	− 0,0600
0,9	− 0,797	+ 0,0418	+ 0,0716	− 0,0537
1,0	− 0,843	+ 0,0311	+ 0,0752	− 0,0433
1,1	− 0,880	+ 0,0225	+ 0,0778	− 0,0370
1,2	− 0,910	+ 0,0158	+ 0,0797	− 0,0259
1,3	− 0,934	+ 0,0110	+ 0,0811	− 0,0217
1,4	− 0,952	+ 0,0077	+ 0,0820	− 0,0104
1,5	− 0,966	+ 0,0049	+ 0,0825	− 0,0093
1,6	− 0,976	+ 0,0028	+ 0,0827	− 0,0
1,7	− 0,984	+ 0,0022	+ 0,0831	0
1,8	− 0,989	+ 0,0015	+ 0,0834	0
1,9	− 0,993	+ 0,0009	+ 0,0835	0
2,0	− 0,995	+ 0,0004	+ 0,0836	0
2,1	− 0,997	+ 0,0002	+ 0,0836	0
2,2	− 0,998	0	+ 0,0836	0
2,3	− 0,999	0	+ 0,0836	0
2,4	− 0,999	0	+ 0,0836	0
2,5	− 1,000	0	+ 0,0836	0
2,6	− 1,000	0	+ 0,0836	0

Funktionentafel II.

η	f_0, Auslauf	f_1, Auslauf	f_1^*, Auslauf	f_2, Auslauf
0,05	+ 0,056	− 0,0669	− 0,0017	
0,1	+ 0,113	− 0,1240	− 0,0065	− 0,0046
0,2	+ 0,223	− 0,2118	− 0,0236	− 0,0096
0,3	+ 0,329	− 0,2672	− 0,0478	− 0,0150
0,4	+ 0,428	− 0,2950	− 0,0761	− 0,0196
0,5	+ 0,521	− 0,3009	− 0,1061	− 0,0242
0,6	+ 0,604	− 0,2897	− 0,1357	− 0,0280
0,7	+ 0,678	− 0,2671	− 0,1636	− 0,0304
0,8	+ 0,742	− 0,2371	− 0,1889	− 0,0316
0,9	+ 0,797	− 0,2038	− 0,2109	− 0,0312
1,0	+ 0,843	− 0,1699	− 0,2296	− 0,0297
1,1	+ 0,880	− 0,1380	− 0,2450	− 0,0270
1,2	+ 0,910	− 0,1090	− 0,2573	− 0,0240
1,3	+ 0,934	− 0,0842	− 0,2669	− 0,0202
1,4	+ 0,952	− 0,0633	− 0,2743	− 0,0169
1,5	+ 0,966	− 0,0467	− 0,2798	− 0,0136
1,6	+ 0,976	− 0,0336	− 0,2838	− 0,0110
1,7	+ 0,984	− 0,0237	− 0,2868	− 0,0079
1,8	+ 0,989	− 0,0164	− 0,2887	− 0,0064
1,9	+ 0,993	− 0,0110	− 0,2900	− 0,0039
2,0	+ 0,995	− 0,0075	− 0,2909	− 0,0034
2,1	+ 0,997	− 0,0047	− 0,2915	− 0,0014
2,2	+ 0,998	− 0,0030	− 0,2919	0
2,3	+ 0,999	− 0,0019	− 0,2921	0
2,4	+ 0,999	− 0,0014	− 0,2922	0
2,5	+ 1,000	− 0,0008	− 0,2923	0
2,6	+ 1,000	0	− 0,2923	0

998

Der senkrecht zu seiner Ebene schwingende Kreisbogenträger mit I-Querschnitt.

Von *Karl Federhofer* in Graz.

Wird ein Kreisbogenträger zu Eigenschwingungen senkrecht zu seiner Bogenebene angeregt, so entstehen Biegungs-Drillungsschwingungen, deren Theorie in einer früheren Arbeit[1]) des Verfassers ausführlich dargestellt worden ist; dort findet man die Entwicklung der Frequenzgleichungen für die symmetrischen und gegensymmetrischen Eigenschwingungen des an den Enden eingespannten Bogenträgers von beliebigem Zentriwinkel 2α, sowie eine Zusammenstellung der kleinsten Wurzeln dieser Gleichungen für die Sonderfälle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Halbkreis) und $\alpha = \pi$ (voller Ring) in ihrer Abhängigkeit von der Querschnittsform des Trägers.

Die gewonnenen Ergebnisse gelten aber entsprechend den ihrer Herleitung zugrunde gelegten elastizitätstheoretischen Ansätzen strenge nur für Bogenträger mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt und mit guter Näherung — wie auch durch Versuche von F. H. Brown[2]) bestätigt worden ist — für den Rechteckquerschnitt. Hingegen bedarf der Fall des für den Stahlbau wichtigen I-Querschnittes einer besonderen Untersuchung, die auf die örtliche Behinderung der Querschnittsverwölbung und die damit verbundene Verbiegung der Trägerflanschen Rücksicht zu nehmen hat. Es ist das Ziel dieser Untersuchung, den Einfluß des sogenannten „Wölbwiderstandes" des I-Querschnitts auf die Größe der Schwingzahlen des Kreisbogenträgers zu ermitteln.

Im folgenden wird in (1) die Differentialgleichung dieses Schwingungsproblems entwickelt, in (2) werden die Schwingzahlen für den vollen freien Ring einschließlich des Einflusses des Wölbwiderstandes und der Drehungsträgheit berechnet und in (3) die Frequenzengleichungen der symmetrischen und gegensymmetrischen Eigenschwingungen des beiderseits eingespannten

[1]) K. Federhofer: Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, Bd. 145 (1936), S. 29.
[2]) F. H. Brown: J. Franklin Inst., Bd. 218 (1934), S. 41.

Bogenträgers mit beliebigem Öffnungswinkel 2α aufgestellt. Da die genaue Bestimmung ihrer kleinsten Wurzeln für verschiedene Trägerprofile sehr mühsame Rechnungen erforderlich macht, wird schließlich in (4) mit Hilfe des Rayleighschen Verfahrens eine einfache Näherungsformel abgeleitet, welche die genäherte Berechnung der kleinsten Wurzel der Frequenzengleichung und damit der Schwingzahlen in ihrer Abhängigkeit vom Wölbwiderstand der gebräuchlichen I-Normalprofilträger gestattet. Hierbei beschränke ich mich auf die für die kleinsten Schwingzahlen allein in Frage kommenden symmetrischen Schwingungen.

1. Die Differentialgleichung der Eigenschwingungen des I-Trägers. Die Bewegungsgleichungen für ein Element ds des Bogenträgers werden aus den bekannten Gleichgewichtsgleichungen[3]) durch Berücksichtigung der Trägheitsreaktionen gewonnen. Sie lauten mit μ_1 als Masse des Trägers je Längeneinheit und a als Bogenhalbmesser

$$\frac{\partial N'}{\partial s} = \mu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{G}{a} = \mu_1 i_p^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} + \frac{H}{a} - N' = -\mu_1 i_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Hierin bedeutet G, H das bei der Bewegung des Trägerelementes am Orte s entstehende Biegungs- und Drillungsmoment und N' die Querschnittsschubkraft; ferner $v(s,t)$ die vom Orte s und von der Zeit t abhängige Auslenkung senkrecht zur Bogenebene, $\beta(s,t)$ den örtlichen Drillwinkel. Bezeichnen weiter $A = EFi_1^2$ die Biegungssteifigkeit für die zum Steg senkrechte Querschnittshauptachse, C die Drillungssteifigkeit, E den Elastizitätsmodul und i_p den polaren Trägheitshalbmesser des Querschnittes für den Schwerpunkt, so gilt nach der angeführten Quelle

$$G = A\varkappa, \qquad \varkappa = \frac{\beta}{a} - \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

$$H = C\tau, \qquad \tau = \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Infolge der Drehung des Querschnittes um den Winkel β erfahren die beiden Flansche radiale Verschiebungen $u = \mp \frac{h}{2}\beta$ (h gleich Trägerhöhe) und es beträgt nach einer bekannten Formel für die ebene Biegung des krummen Balkens das Flanschbiegungsmoment

$$M = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{u}{a^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

wenn D die Biegungssteifigkeit eines Flansches für die betrachtete Verbiegung bedeutet, die genügend genau gleich der halben Biegungssteifigkeit $B = EFi_2^2$ des ganzen Trägers für die zum Steg parallel laufende Hauptachse gesetzt werden kann. Die dieser Biegung zugehörigen Querkräfte Q des oberen und unteren Flansches berechnen sich aus $Q = \frac{\partial M}{\partial s}$ zu

$$Q = D\left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{\partial u}{a^2 \partial s}\right)$$

und bilden, da sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, ein Kraftpaar vom Betrage

$$Qh = -\frac{Dh^2}{2}\left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial s^3} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

das sich dem Verdrehungsmomente widersetzt; demnach ist Gl. (5) bei Anwendung auf I-Träger zu ersetzen durch

$$H = C\left(\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial s}\right) - D^*\left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial s^3} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

worin

$$D^* = \frac{Dh^2}{2} = E\left(\frac{h^2}{4}J_2\right) = EC^* \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

C^* heißt der „Wölbwiderstand" des Querschnittes[4]).

[3]) A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität (deutsch von H. Timpe), S. 456, Leipzig 1907.
[4]) R. Kappus: Luftf.-Forschg., Bd. 14 (1937), S. 446.

Gl. (8) stellt die Erweiterung des von S. Timoshenko[5]) schon im Jahre 1906 gewonnenen und experimentell überprüften Zusammenhanges zwischen Drillmoment und Drillwinkel beim geraden Träger mit I-Profil auf den Bogenträger dar.

Mit $s = a\varphi$ und ω als Kreisfrequenz wird die Eigenschwingung des Bogens dargestellt durch

$$v(\varphi, t) = \bar{v}(\varphi)\cos\omega t,$$
$$\beta(\varphi, t) = \bar{\beta}(\varphi)\cos\omega t.$$

Die Eintragung dieser Ansätze in die Bewegungsgleichungen (1 bis 3) führt zu den folgenden Gleichungen für die Eigenfunktionen $\bar{v}(\varphi)$ und $\bar{\beta}(\varphi)$, in denen, da es sich weiterhin nur mehr um die Eigenfunktionen handelt, die oberen Querstriche wieder fortgelassen sind

$$\frac{dN'}{d\varphi} = -\mu_1 a \omega^2 v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)},$$

$$\frac{dH}{d\varphi} - G = -\mu_1 a i_p^2 \omega^2 \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)},$$

$$\frac{dG}{d\varphi} + H - N' a = +\mu_1 i_1^2 \omega^2 \frac{dv}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}.$$

Wird (c) nach φ differenziert und dabei auf (b) und (a) Bedacht genommen, so ergibt sich wegen $G = A\varkappa$:

$$\varkappa^{II} + \varkappa + \mu_1 a^2 \omega^2 \left(v - \frac{i_1^2}{a^2} v^{II}\right) - \frac{\mu_1 a i_p^2 \omega^2}{A} \beta = 0 \quad \ldots\ldots \text{(10a)}.$$

Die hochgestellten römischen Zahlen bedeuten Ableitungen nach φ. Ferner läßt sich Gl. (b) mit Beachtung der Beziehung (8) überführen in

$$A\varkappa = \frac{C}{a}\left(\beta^{II} + \frac{v^{II}}{a}\right) - \frac{D^*}{a^3}(\beta^{IV} + \beta^{II}) + \mu_1 a i_p^2 \omega^2 \beta \quad \ldots\ldots \text{(10b)}.$$

Setzt man hinzu noch die Gl. (4)

$$\varkappa = \frac{\beta}{a} - \frac{1}{a^2} v^{II} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(10c)},$$

so enthalten die drei Gleichungen (10) nur die drei Veränderlichen v, β, $\varkappa$ und deren Ableitungen in linearem Zusammenhange und es liefert die Beseitigung von β und $\varkappa$ nach längerer Rechnung folgende Differentialgleichung für die Eigenfunktion $v(\varphi)$

$$\left.\begin{aligned} v^{VIII} + \left(2 - p + k\frac{i_1^2}{a^2}\right) v^{VI} + \left[1 - k\left(1 - \frac{i_1^2}{a^2}\right) - p\left(2 + k\frac{i_1^2}{a^2}\right) - \lambda p k \frac{i_p^2}{a^2}\right] v^{IV} \\ - \left[k + p - p k\left(1 + \frac{i_p^2}{a^2}\right) - \lambda p k \frac{i_1^2}{a^2}\left(1 - k\frac{i_p^2}{a^2}\right)\right] v^{II} - \left(1 - k\frac{i_p^2}{a^2}\right)\lambda p k v = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(I)}.$$

Hierin sind die Dimensionslosen λ, k, p festgelegt durch

$$\lambda = \frac{A}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(11)},$$

$$k = \frac{\mu_1 a^4 \omega^2}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(12)},$$

$$p = \frac{C a^2}{D^*} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(13)}.$$

Es ist demnach in der Grundgleichung (I) durch die mit p behafteten Glieder der Einfluß der Flanschbiegung zum Ausdruck gebracht, während die mit $\frac{i_1^2}{a^2}$ und $\frac{i_p^2}{a^2}$ versehenen Glieder den Anteil der Drehungsträgheit angeben. Aus den drei Gleichungen (10) findet man auch, daß der Drehwinkel β einer mit (I) formal übereinstimmenden Differentialgleichung genügen muß.

Mit Vernachlässigung der Flanschbiegung, d. h. mit $D^* = 0$, $p = \infty$, geht obige Gl. (I) über in

$$v^{VI} + \left[2 + k\frac{i_1^2 + \lambda i_p^2}{a^2}\right] v^{IV} + \left[1 - k\left\{\left(1 + \frac{i_p^2}{a^2}\right) + \lambda\frac{i_1^2}{a^2}\left(1 - k\frac{i_p^2}{a^2}\right)\right\}\right] v^{II} + \left(1 - k\frac{i_p^2}{a^2}\right)\lambda k v = 0 \quad \text{(Ia)};$$

[5]) S. Timoshenko: Berichte d. Polytechn. Inst. St. Petersburg, Bd. 4 (1905) und Bd. 5 (1906). Z. Math. Phys., Bd. 58 (1910), S. 362.

werden darin noch die von der Drehungsträgheit herrührenden Glieder gestrichen ($i_1 = 0$, $i_p = 0$), so folgt die schon in meiner eingangs erwähnten Arbeit abgeleitete einfache Grundgleichung

$$v^{VI} + 2\,v^{IV} + (1-k)\,v^{II} + \lambda\,k\,v = 0.$$

Gehen wir endlich mit Gl. (Ia) zur Grenze $a \to \infty$ über (gerader Stab), dann entsteht mit der Abkürzung $c^2 = \frac{A}{\mu_1}$ und mit $a\,d\varphi = d\,x$ die Gleichung

$$c^2\,v^{VI} + \omega^2\,i_1^{\,2}\left(1 + \frac{A}{C}\,\frac{i_p^{\,2}}{i_1^{\,2}}\right)v^{IV} + \left[-\omega^2 + \mu_1\,\omega^4\,\frac{i_1^{\,2}\,i_p^{\,2}}{A}\,\lambda\right]v^{II} - \frac{\mu_1\,\omega^4\,i_p^{\,2}}{C}\,v = 0 \quad . \quad . \quad \text{(Ib)},$$

worin die Ableitungen nach x zu nehmen sind.

Mit $i_p = 0$ folgt daraus die bekannte Gleichung

$$c^2\,v^{VI} + \omega^2\,i_1^{\,2}\,v^{IV} - \omega^2\,v^{II} = 0$$

für die Biegungsschwingung des geraden Stabes mit Berücksichtigung der Drehungsträgheit, und mit $i_1 = 0\,(A = 0)$ ergibt sich, da — wie schon früher erwähnt — für den Drehwinkel β eine mit (Ib) übereinstimmende Gleichung besteht,

$$\beta^{II} + \frac{\mu_1\,\omega^2\,i_p^{\,2}}{C}\,\beta = 0,$$

das ist die bekannte Grundgleichung für die reinen Drillschwingungen eines geraden Stabes.

Für die Aufstellung der Frequenzengleichungen ist es noch notwendig, den Drillwinkel β und die Schubkraft N' durch die Eigenfunktion v und deren Ableitungen auszudrücken.

Wird zu diesem Behufe die Gl. (10a) zweimal nach φ differenziert, so liefert die so entstandene Gleichung im Vereine mit (10a) und (10b) bei Beachtung von (10c) drei lineare Gleichungen für β, β^{II}, β^{IV}, aus denen sich der Drehwinkel β nach längerer Rechnung in folgender Abhängigkeit von v ergibt

$$\left.\begin{aligned} \beta\,a\left(1 + \lambda - \frac{k}{p}\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right)\left(1 - k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right) &= v^{IV} + \left(2 + \lambda + k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right)v^{II} - k\,v \\ -\frac{1}{p}\left[v^{VI} + \left(1 + k\,\frac{i_1^{\,2} + i_p^{\,2}}{a^2}\right)v^{IV} - \left(1 - \frac{i_p^{\,2}}{a^2} - k\,\frac{i_1^{\,2}\,i_p^{\,2}}{a^4}\right)k\,v^{II} - k^2\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\,v\right] & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Schubkraft N' berechnet sich aus der Bewegungsgleichung (c) unter Bedachtnahme auf die Gl. (4) und (8) zu

$$N'\,\frac{a^3}{C} = (1 + \lambda)\,a\,\beta^{I} + \left(1 - \lambda\,k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right)v^{I} - \lambda\,v^{III} - \frac{a}{p}\,(\beta^{III} + \beta^{I}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

2. Die Frequenzengleichung für den geschlossenen, freien Ring. Das allgemeine Integral der Grundgleichung (I) lautet

$$v(\varphi) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4}(A_\varkappa \cos n_\varkappa \varphi + B_\varkappa \sin n_\varkappa \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

worin n_1, n_2, n_3, n_4 die Wurzeln der Hauptgleichung

$$n^8 - \left(2 - p + k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right)n^6 + \left[1 - k\left(1 - \frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right) - p\left(2 + k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right) - \lambda\,p\,k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right]n^4$$

$$+ \left[k + p - p\,k\left(1 + \frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right) - \lambda\,p\,k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\left(1 - k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right)\right]n^2 - \left(1 - k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right)\lambda\,p\,k = 0$$

sind. Hierin können für die den folgenden Zahlenrechnungen zugrunde gelegten gebräuchlichen Normalträgerprofile die Werte $k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}$ und $k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}$ als klein gegenüber der Einheit gestrichen werden. Damit gilt die folgende Hauptgleichung

$$[n^8 - 2\,n^6 + n^4(1-k) + n^2\,k] + p\left[n^6 - n^4\left(2 + \lambda\,k\,\frac{i_p^{\,2}}{a^2}\right) + n^2\left(1 - k - \lambda\,k\,\frac{i_1^{\,2}}{a^2}\right) - \lambda\,k\right] = 0 \quad . \quad . \quad (17).$$

Für den geschlossenen Ring muß n eine ganze Zahl sein, die größer als Eins ist; denn $n = 0$ liefert gemäß (16) eine Parallelverschiebung des starren Ringes um das Maß $A_\varkappa$, und $n = 1$ führt auf eine Drehung des starren Ringes um den zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = 0$ gehörigen Durchmesser.

Für den jedem gewählten n entsprechenden Wert k, mit dessen Kenntnis nach (12) die zugehörige Kreisfrequenz ω_n bestimmt ist, folgt aus (17)

$$k = \frac{n^2(n^2-1)^2 + \dfrac{n^4(n^2-1)^2}{p}}{n^2+\lambda+\lambda n^2\dfrac{i_1^2+n^2 i_p^2}{a^2}+\dfrac{n^2(n^2-1)}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Bei Vernachlässigung der Flanschenbiegung ($p=\infty$) ergibt sich hieraus der Wert[6])

$$k_0 = \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+\lambda\left(1+n^2\dfrac{i_1^2+n^2 i_p^2}{a^2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18a),$$

worin das im Nenner stehende Glied

$$n^2\frac{i_1^2+n^2 i_p^2}{a^2} = \chi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

auf die Berücksichtigung der Drehungsträgheit zurückzuführen ist; hiernach ist der Torsionseinfluß (Glied mit i_p^2) das n^2-fache des Biegungseinflusses (Glied mit i_1^2). Bei Vernachlässigung dieser Einflüsse vereinfacht sich (18a) in die bereits an anderer Stelle[7]) abgeleitete Formel

$$(k_0) = \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18b).$$

Mit $J_1 = F i_1^2$, $J_p = F i_p^2$ formen wir (19) um in

$$\chi = n^2\frac{J_1+n^2 J_p}{F h^2}\cdot\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

und führen die Gl. (18a) bei Beachtung von (18b) und (19) über in

$$k_0 = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda\chi}{n^2+\lambda}}(k_0) = \nu(k_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

worin

$$\nu = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda\chi}{n^2+\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20a).$$

Dieser Beiwert ν gestattet die Beurteilung des Einflusses der Drehungsträgheit auf die Größe von k und damit auch auf die Kreisfrequenz ω. Die Zahlentafel 1 enthält eine Zusammenstellung der Werte ν für 12 gebräuchliche Trägerprofile, und zwar für die Wellenzahlen $n=2,3,4$ und für $\frac{h}{a}=\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$. Auch sind dort die den Profilen zugehörigen λ-Werte (Gl. 11) angegeben, die mit zunehmender Trägerhöhe von $\lambda=281$ (für I8) auf $\lambda=535$ (I60) anwachsen[8]).

Aus den Zahlenreihen für ν ist zu entnehmen, daß die Drehungsträgheit eine Abnahme von (k_0) und damit auch der Schwingzahlen zur Folge hat und daß sich ihr Einfluß um so stärker äußert, je höher die Wellenzahl n und je stärker die Krümmung $\frac{1}{a}$ des Ringes ist; dagegen ändern sich die Beiwerte ν nur unbedeutend mit der Profilhöhe h.

[6]) Die Berücksichtigung der durch die Querkräfte N' bewirkten Neigung der elastischen Linie würde — wie eine hier nicht wiedergegebene Untersuchung zeigte — den Nenner in (18a) um den Betrag $\frac{n^4 i_1^2}{a^2}\frac{E}{\varkappa' G}$ vergrößern, wo G den Schubmodul, $\frac{1}{\varkappa'}$ die Schubverteilungszahl des Querschnittes bedeuten. Letztere ist für die gebräuchlichen I-Profile etwas größer als 2, es gewinnt diese Verbesserung erst bei größeren Ordnungszahlen n Bedeutung, sie wird aber — unabhängig von n — von dem Torsionseinfluß sehr erheblich, und zwar um das rund $\frac{\lambda}{5}$-fache übertroffen.

[7]) K. Federhofer: Ing.-Arch. Bd. 4 (1933), S. 115.

[8]) Für das Steifigkeitsverhältnis $\lambda=\frac{A}{C}$ ergibt sich mit J_1 als Trägheitsmoment für die zum Steg senkrechte Querschnittshauptachse und J_D als Drillungswiderstand des Querschnittes $\lambda=\frac{E J_1}{G J_D}$, wobei der Schubmodul $G=\frac{E}{2(1+\sigma)}$ (σ Poissonsche Konstante), so daß mit der Annahme $\sigma=0{,}3$: $\lambda=2{,}6\frac{J_1}{J_D}$.

Diese λ-Werte entsprechen den bereits in einer Arbeit von G. Unold: Der Kreisträger, Berlin 1922, S. 59 berechneten ε-Werten; sie sind dort sowohl für die gebräuchlichen deutschen I-Normalprofil-Träger als auch für breitflanschige Differdinger I-Träger tabellarisch zusammengestellt.

Zahlentafel 1. Voller Ring.

Einflußzahl ν für Drehungsträgheit (Gl. 20a) in Abhängigkeit von a/h, von Wellenzahl n und vom Profile. λ-Werte (Gl. 11).

I-Profil	λ	Einflußzahl ν für Drehungsträgheit								
		$a/h=5$			$a/h=10$			$a/h=20$		
		$n=2$	3	4	$n=2$	3	4	$n=2$	3	4
8	281	0·864	0·588	0·326	0·962	0·851	0·659	0·990	0·958	0·885
10	333	0·866	0·591	0·327	0·963	0·852	0·660	0·990	0·959	0·886
15	433	0·869	0·598	0·332	0·964	0·856	0·666	0·991	0·960	0·888
20	495	0·871	0·600	0·334	0·964	0·857	0·668	0·991	0·960	0·889
25	534	0·871	0·602	0·336	0·964	0·858	0·669	0·991	0·960	0·890
30	538	0·873	0·606	0·342	0·965	0·860	0·675	0·991	0·961	0·893
36	538	0·875	0·610	0·343	0·966	0·862	0·677	0·991	0·962	0·893
40	538	0·876	0·612	0·345	0·966	0·863	0·679	0·991	0·962	0·894
45	538	0·877	0·613	0·347	0·966	0·864	0·680	0·991	0·962	0·895
50	538	0·878	0·616	0·349	0·966	0·865	0·682	0·991	0·962	0·896
55	538	0·877	0·614	0·347	0·966	0·864	0·680	0·991	0·962	0·895
60	535	0·878	0·618	0·351	0·967	0·866	0·684	0·991	0·963	0·896

Um den Einfluß der Flanschenbiegung auf die Schwingzahlen zahlenmäßig zu beurteilen, geben wir Gl. (18) bei Beachtung von (18a) und (20a) die Form

$$k = k_0 \frac{1+\dfrac{n^2}{p}}{1+\dfrac{n^2(n^2-1)\nu}{p(n^2+\lambda)}} = k_0\,\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Der hiermit bestimmte Einflußwert μ der Flanschenbiegung ist für verschiedene Trägerprofile in seiner Abhängigkeit von der Ordnungszahl n der Schwingung, von p und von $\dfrac{h}{a}$ aus der Zahlentafel 2 zu entnehmen, in der auch die den Profilen zugehörigen Parameter p[9]) (Gl. 13) angegeben sind. Der Beiwert μ ist hiernach immer größer als Eins; das war vorauszusehen, denn der Wölbwiderstand wirkt versteifend und hat daher eine Erhöhung der Schwingzahlen und damit auch von k zur Folge. Die Erhöhung nimmt mit wachsender Wellenzahl n und Krümmung $\dfrac{1}{a}$ erheblich zu, doch ist auch hier wieder ihre Abhängigkeit von der Profilhöhe

Zahlentafel 2. Voller Ring.

Einflußzahl μ der Flanschenbiegung (Gl. 21) in Abhängigkeit von a/h, Wellenzahl n und vom Flanschbiegungsparameter p. Zahlenwerte p (Gl. 13).

I-Profil	Parameter p			Einflußzahl μ für Flanschenbiegung								
				$a/h=5$			$a/h=10$			$a/h=20$		
	$a/h=5$	10	20	$n=2$	3	4	$n=2$	3	4	$n=2$	3	4
8	4·40	17·60	70·40	1·893	2·948	4·375	1·224	1·493	1·853	1·056	1·124	1·215
10	4·20	16·79	67·16	1·939	3·054	4·567	1·236	1·520	1·902	1·059	1·131	1·227
15	3·87	15·47	61·88	2·022	3·245	4·911	1·256	1·568	1·993	1·064	1·143	1·249
20	3·71	14·85	59·40	2·066	3·347	5·094	1·267	1·593	2·034	1·067	1·149	1·261
25	3·64	14·56	58·24	2·088	3·398	5·187	1·273	1·606	2·058	1·068	1·152	1·266
30	4·03	16·12	64·48	1·983	3·170	4·794	1·246	1·547	1·957	1·062	1·137	1·241
36	4·50	18·00	72·00	1·881	2·947	4·410	1·221	1·491	1·859	1·055	1·123	1·216
40	4·71	18·84	73·36	1·842	2·862	4·262	1·211	1·469	1·821	1·054	1·121	1·212
45	4·98	19·90	79·60	1·797	2·764	4·092	1·200	1·444	1·778	1·050	1·111	1·195
50	5·21	20·82	83·28	1·762	2·687	3·959	1·191	1·425	1·744	1·048	1·106	1·187
55	5·29	21·15	84·60	1·750	2·661	3·915	1·188	1·418	1·732	1·047	1·105	1·184
60	5·58	22·33	89·32	1·710	2·574	3·763	1·178	1·396	1·694	1·044	1·099	1·174

[9]) Nach Gl. (13) gilt für den die Flanschbiegung kennzeichnenden Parameter p die Beziehung $p=\dfrac{C\,a^2}{D^*}$. Wegen $D^*=\dfrac{D\,b^2}{2}$ (Gl. 9), $D=\dfrac{E\,J_2}{2}$ und $C=G\,J_D$ wird $p=\dfrac{2}{1+\sigma}\left(\dfrac{a}{h}\right)^2\dfrac{J_D}{J_2}$ und mit $\sigma=0{\cdot}3$: $p=1{\cdot}54\left(\dfrac{a}{h}\right)^2\dfrac{J_D}{J_2}$.
Dieser Parameter stimmt überein mit dem Kennwert ϱ^2 in der vorhin angeführten Schrift von G. Unold (S. 59).

unbedeutend. Die durch die Beiwerte $\nu(<1)$ und $\mu(>1)$ dargestellten Einflüsse der Drehungsträgheit und des Wölbwiderstandes äußern sich in entgegengesetztem Sinne, sie wirken daher z. T. ausgleichend gemäß der aus (20) und (21) hervorgehenden Beziehung

$$k = \mu\,\nu\,(k_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Die in der folgenden Zahlentafel 3 zusammengestellten Werte $\mu\,\nu$ sind durchwegs größer als Eins; demnach überwiegt die Wirkung des Wölbwiderstandes und es hat daher die Beachtung beider Nebeneinflüsse eine Erhöhung der Schwingzahlen in dem durch den Faktor $\mu\,\nu$ bestimmten Betrage zur Folge.

Zahlentafel 3. Voller Ring.

Einflußzahl $\nu\cdot\mu$ für vereinigte Wirkung der Drehungsträgheit und Flanschenbiegung (Gl. 22).

I-Profil	$a/h=5$			$a/h=10$			$a/h=20$		
	$n=2$	3	4	$n=2$	3	4	$n=2$	3	4
8	1·637	1·734	1·425	1·178	1·271	1·221	1·046	1·077	1·076
10	1·678	1·804	1·494	1·190	1·295	1·256	1·049	1·084	1·087
15	1·757	1·939	1·633	1·211	1·342	1·327	1·054	1·096	1·110
20	1·798	2·009	1·704	1·222	1·365	1·359	1·057	1·102	1·121
25	1·819	2·044	1·740	1·227	1·377	1·376	1·059	1·106	1·127
30	1·732	1·922	1·641	1·203	1·331	1·322	1·052	1·093	1·108
36	1·646	1·797	1·514	1·179	1·285	1·257	1·046	1·080	1·086
40	1·613	1·751	1·472	1·170	1·268	1·236	1·045	1·078	1·083
45	1·575	1·696	1·420	1·159	1·247	1·209	1·041	1·069	1·069
50	1·546	1·655	1·382	1·151	1·232	1·189	1·039	1·065	1·063
55	1·534	1·634	1·359	1·148	1·225	1·179	1·038	1·063	1·059
60	1·503	1·590	1·320	1·139	1·209	1·158	1·036	1·058	1·052

3. Die Frequenzgleichungen für den an beiden Enden eingespannten Kreisbogenträger. Zufolge der Einspannung des Bogens an der Stelle $\varphi=0$ hat dort die allgemeine Lösung (16) die Bedingungen $v(0)=0$, $v^{\mathrm{I}}(0)=0$, $\beta(0)=0$ zu erfüllen. Hierzu tritt bei vollkommener Einspannung noch die Bedingung, daß die Tangente an die Flanschmittellinie keine Verdrehung erfährt. Allgemein gilt für diesen Verdrehungswinkel

$$\psi=\frac{w-u^{\mathrm{I}}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

wenn u, w die radiale und tangentielle Verschiebung eines Punktes der Flanschmittellinie an der Stelle φ bedeutet. Nun ist

$$u=\frac{h}{2}\beta, \qquad w=\frac{h}{2}\frac{v^{\mathrm{I}}}{a},$$

daher

$$\psi=\frac{h}{2\,a}\left(\frac{v^{\mathrm{I}}}{a}-\beta^{\mathrm{I}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23\mathrm{a}),$$

somit gilt an der Stelle $\varphi=0$, wo $v^{\mathrm{I}}(0)=0$ ist, noch die vierte Bedingung $\psi(0)=\beta^{\mathrm{I}}(0)=0$. Dies führt bei Beachtung der Gl. (16) und (14) zu dem Gleichungssystem

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} A_\varkappa=0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} n_\varkappa B_\varkappa=0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} b_\varkappa A_\varkappa=0, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=4} n_\varkappa b_\varkappa B_\varkappa=0 \quad \ldots \quad (24\mathrm{a}),$$

worin

$$b_\varkappa=n_\varkappa^4-\left(2+\lambda+k\frac{i_1^2}{a^2}\right)n_\varkappa^2-k$$

$$+\frac{1}{p}\left[n_\varkappa^6-\left(1+k\frac{i_p^2+i_1^2}{a^2}\right)n_\varkappa^4-\left(1-\frac{i_p^2}{a^2}-k\frac{i_1^2\,i_p^2}{a^4}\right)k\,n_\varkappa^2+k^2\frac{i_p^2}{a^2}\right]\cdot(\varkappa=1,2,3,4).$$

Die weiteren vier Gleichungen für die 8 Integrationskonstanten ergeben sich verschieden, je nachdem die symmetrischen oder gegensymmetrischen Schwingungen untersucht werden.

a) Symmetrische Schwingungen. Die Symmetriebedingungen an der Stelle des Bogenscheitels ($\varphi = \alpha$) sind

$$v^{\mathrm{I}} = 0\,, \qquad N' = 0\,, \qquad Q = 0\,, \qquad \psi = 0\,;$$

zufolge (23) und (7) muß daher auch $\beta^{\mathrm{I}}(\alpha) = 0$, $\beta^{\mathrm{III}}(\alpha) = 0$ sein und $N'(\alpha) = 0$ führt hiermit zur Forderung $v^{\mathrm{III}}(\alpha) = 0$.

Die Erfüllung dieser Bedingungen liefert gemäß (16) und (14) die vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\, n_\varkappa\, [-A_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha] = 0\,,\\ &\Sigma\, n_\varkappa^3\, [-A_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha] = 0\,,\\ &\Sigma\, n_\varkappa\, b_\varkappa\, [-A_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha] = 0\,,\\ &\Sigma\, n_\varkappa^3\, b_\varkappa\, [-A_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \ldots (24\,\mathrm{b}),$$

aus denen folgt

$$-A_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha = 0\,.$$

Da demnach

$$B_\varkappa = A_\varkappa \operatorname{tg} n_\varkappa \alpha \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4),$$

so führt die Eintragung dieser Werte in (24a) zu vier homogenen, linearen Gleichungen für die vier Integrationskonstanten $A_\varkappa$, deren gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante die gesuchte Frequenzengleichung darstellt; sie lautet

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 \operatorname{tg} n_1 \alpha & n_2 \operatorname{tg} n_2 \alpha & n_3 \operatorname{tg} n_3 \alpha & n_4 \operatorname{tg} n_4 \alpha \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ n_1 b_1 \operatorname{tg} n_1 \alpha & n_2 b_2 \operatorname{tg} n_2 \alpha & n_3 b_3 \operatorname{tg} n_3 \alpha & n_4 b_4 \operatorname{tg} n_4 \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (25).$$

b) Gegensymmetrische Schwingungen. Die Erfüllung der Bedingungen der Gegensymmetrie an der Stelle $\varphi = \alpha$, und zwar

$$v(\alpha) = 0\,, \qquad v^{\mathrm{II}}(\alpha) = 0\,, \qquad \beta(\alpha) = 0\,, \qquad \beta^{\mathrm{II}}(\alpha) = 0$$

ergibt das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\, (A_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha) = 0\,,\\ &\Sigma\, n_\varkappa^2\, (A_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha) = 0\,,\\ &\Sigma\, b_\varkappa\, (A_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha) = 0\,,\\ &\Sigma\, n_\varkappa^2\, b_\varkappa\, (A_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \ldots (26).$$

Hiernach ist

$$A_\varkappa \cos n_\varkappa \alpha + B_\varkappa \sin n_\varkappa \alpha = 0$$

oder

$$B_\varkappa = -A_\varkappa \operatorname{ctg} n_\varkappa \alpha \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

und es liefert hiermit das Gleichungssystem (24a) folgende Frequenzengleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 \operatorname{ctg} n_1 \alpha & n_2 \operatorname{ctg} n_2 \alpha & n_3 \operatorname{ctg} n_3 \alpha & n_4 \operatorname{ctg} n_4 \alpha \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ n_1 b_1 \operatorname{ctg} n_1 \alpha & n_2 b_2 \operatorname{ctg} n_2 \alpha & n_3 b_3 \operatorname{ctg} n_3 \alpha & n_4 b_4 \operatorname{ctg} n_4 \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (27).$$

Die Ermittlung der kleinsten Wurzeln der Frequenzengleichungen (25) und (27) erfordert ersichtlich sehr langwierige Rechnungen, denn in ihnen kommen verschiedene Argumente $n_\varkappa \alpha$ vor, die der Hauptgleichung (17) — einer Gleichung vierten Grades für $n_\varkappa^2$ — genügen müssen, deren Wurzeln auch imaginär und komplex sein können.

Wir wollen daher im nächsten Abschnitte Näherungswerte der kleinsten Wurzeln auf Grund des Rayleighschen Verfahrens berechnen, wobei wir uns auf die Untersuchung der symmetrischen Schwingung beschränken, welche die kleinste Grundschwingzahl besitzt.

4. Näherungsformel zur Ermittlung der Grundschwingzahl für die symmetrischen Eigenschwingungen. Für die nun folgende genäherte Behandlung des Falles der symmetrischen Grundschwingung sei die unbekannte genaue Schwingungsform des Bogenträgers durch jene elastische Linie ersetzt, die sich unter der Wirkung einer im Bogenscheitel angreifenden, zur Bogenebene senkrechten Einsatzkraft P einstellt. Sie genügt einer Differentialgleichung

8. Ordnung, die aus der Grundgleichung (I) für $v(\varphi)$ hervorgeht, wenn dort alle, den Faktor k enthaltenden, von den Trägheitskräften herrührenden Glieder gestrichen werden; sie lautet daher

$$(v^{VIII} + 2v^{VI} + v^{IV}) - p(v^{VI} + 2v^{IV} + v^{II}) = 0;$$

mit der Abkürzung

$$p = \varrho^2 \quad \ldots \quad (28)$$

ist ihre allgemeine Lösung gegeben durch

$$v(\varphi) = C_1 + C_2 \mathfrak{Sin}\,\varrho\varphi + C_3 \mathfrak{Cof}\,\varrho\varphi + C_4 \sin\varphi + C_5 \cos\varphi + C_6 \varphi \sin\varphi + C_7 \varphi\cos\varphi + C_8\varphi \quad (29).$$

Wird der Winkel φ von der Bogensymmetralen aus gemessen, so sind die acht Integrationskonstanten C_{1-8} aus den Bedingungen der Symmetrie und der Einspannung an den Bogenenden zu berechnen:

$$\varphi = 0 \begin{cases} v^{I} = 0, \\ \beta^{I} = 0, \\ \beta^{III} = 0, \\ N' = -\dfrac{P}{2}, \end{cases} \qquad \varphi = a \begin{cases} v = 0, \\ v^{I} = 0, \\ \beta = 0, \\ \beta^{I} = 0. \end{cases}$$

Für den Drillwinkel β und die Schubkraft N' gilt gemäß (14) und (15) bei Streichung der mit k behafteten Glieder

$$\beta a(1+\lambda) = v^{IV} + (2+\lambda)v^{II} - \frac{1}{p}(v^{VI} + v^{IV}),$$

$$N'\frac{a^3}{C} = (1+\lambda)a\beta^{I} + v^{I} - \lambda v^{III} - \frac{a}{p}(\beta^{III} + \beta^{I}).$$

Die Berechnung der acht Konstanten auf Grund der obigen Bedingungen erfordert ziemlich umfangreiche Rechnungen, die für den Sonderfall des eingespannten Halbkreisbogens mit den Abkürzungen

$$\frac{Pa^3}{2C} = d, \quad \frac{2}{1+\lambda}\left(\lambda - \frac{1}{p}\right) = \gamma, \quad 2 + p\gamma = \delta, \quad \frac{p}{1+p} = \beta, \quad \mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{Sin}\,\varrho\frac{\pi}{2}, \quad \mathfrak{C}_1 \equiv \mathfrak{Cof}\,\varrho\frac{\pi}{2},$$

$$M = \varrho\frac{\pi}{2}\mathfrak{C}_1(1+p) - p\gamma\mathfrak{S}_1, \qquad N = \varrho\frac{\pi}{2}\mathfrak{S}_1(1+p) - p\gamma\mathfrak{C}_1$$

zu folgendem Ergebnis führen:

$$C_1 = \frac{d}{\delta N}\left\{\pi(1+p) + \mathfrak{C}_1\left[p^2\gamma(1+\gamma) + 3p\gamma - \frac{\pi}{2}\delta(1+p+p\gamma)\right] + \varrho\frac{\pi}{2}\mathfrak{S}_1(1+p)\left(\delta\frac{\pi}{2} - p\gamma\right)\right\},$$

$$C_2 = \frac{2\beta}{\varrho p\delta}d, \qquad C_3 = -\frac{d}{\delta N}\left\{\frac{2\beta}{\varrho p}M - \frac{\pi}{2}\delta + \gamma(2\beta + p)\right\}, \qquad C_4 = \frac{d}{\delta}[2\beta + p(1+\gamma)],$$

$$C_5 = \frac{d}{\delta N}\left\{-2\beta\gamma - \varrho\mathfrak{S}_1\left[\frac{\pi}{2}p\delta + (3+p)(\beta\gamma + p)\right] - 2p + \delta p(1+\gamma)\mathfrak{C}_1 + p\frac{\pi}{2}N\right\},$$

$$C_6 = -\frac{dp}{\delta N}[2 - \delta\mathfrak{C}_1 + (3+p)\varrho\mathfrak{S}_1], \qquad C_7 = -\frac{p}{\delta}d, \qquad C_8 = -d.$$

Hiermit ergibt sich die Senkung v_0 des Bogenscheitels aus (29) mit $\varphi = 0$ zu $v_0 = \Phi \cdot d$, wo

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{\delta N}\Big\{&\pi\left(1+p+\frac{\delta}{2}\right) - 2p - \gamma(4\beta+p) + \mathfrak{C}_1\Big[-\frac{\pi}{2}\{\delta(1+p+p\gamma) + 2 + p^2\gamma\} \\ &+ p\{3\gamma + 2(1+\gamma)(1+p\gamma)\}\Big] \\ &+ \mathfrak{S}_1\left[\varrho\frac{\pi}{2}(1+p)\left\{\frac{\pi}{2}(\delta+p) - \delta\beta - p\gamma\right\} - \varrho(3+p)(\beta\gamma+p) + \frac{2\beta}{\varrho}\gamma\right]\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Die potentielle Energie V berechnet sich aus $V = \frac{Pv_0}{2}$ wegen $P = \frac{2C}{a^3}d$ und $v_0 = \Phi \cdot d$ zu

$$V = \frac{C}{a^3\Phi}v_0^2,$$

die kinetische Energie T beträgt einschließlich des rotatorischen Anteiles

$$T = \mu_1 a \omega^2 \int_0^{\pi/2} v^2 \, d\varphi + \mu_1 a \omega^2 i_1^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 d\varphi + \mu_1 a \omega^2 i_p^2 \int_0^{\pi/2} \beta^2 \, d\varphi .$$

Gleichsetzung von V und T ergibt für das Quadrat der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{C v_0^2}{\mu_1 a^4 \Phi \left[\int_0^{\pi/2} v^2 \, d\varphi + \frac{i_1^2}{a^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 d\varphi + i_P^2 \int_0^{\pi/2} \beta^2 \, d\varphi\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Die Berechnung der Integrale im Nenner von (31) würde mit dem Ansatze (29) ungemein umständlich werden; ich setze daher hier die Verschiebung v und den Drehwinkel β in der Form

$$v(\varphi) = v_0 \cos^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32a)$$

$$\beta(\varphi) = \beta_0 \cos^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32b)$$

an, womit die für diese Funktionen vorgeschriebenen Rand- und Symmetriebedingungen erfüllt sind. Der Zusammenhang zwischen v_0 und β_0 ergibt sich aus der allgemeinen Gl. (14) bei Benutzung von (32a) mit $\varphi = 0$ und mit einigen zulässigen Vernachlässigungen zu

$$\beta_0 a (1 + \lambda) = v_0 \left(4 - 2\lambda - k + \frac{24 - 2k}{p}\right),$$

oder

$$\beta_0 = \frac{v_0}{a} \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33);$$

wo

$$\eta = \frac{4 - 2\lambda - k + \frac{24 - 2k}{p}}{1 + \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33a).$$

Mit (32) und (33) wird Gl. (31) übergeführt in

$$\omega^2 = \frac{16\, C}{3\pi \mu_1 a^4 \Phi (1 + \tau)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34),$$

wo

$$\tau = \frac{i_p^2 \eta^2 + 4/3\, i_1^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

den Einfluß der rotatorischen Trägheit darstellt. Bei Beachtung von (11) und (12) folgt aus (34)

$$k = \frac{16}{3\pi\lambda\Phi(1 + \tau)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Für $p = \infty$ geht dieser Ausdruck nach Durchführung des Grenzüberganges in (30) und Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit ($\tau = 0$) über in

$$[k] = \frac{16}{3\left[\left(\frac{3\pi^2}{4} - 2\pi - 1\right)\lambda + \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37);$$

dieses $[k]$ stimmt überein mit jenem Werte, der sich aus der von Brown[16]) ohne Rücksicht auf Flanschenbiegung abgeleiteten Formel für den Sonderfall des Halbkreisbogens ergibt.

Die in Zahlentafel 4 zusammengestellten, aus Gl. (35) berechneten Werte τ zeigen, daß für die hier allein betrachtete Grundschwingung der Einfluß der Drehungsträgheit auf k selbst

[16]) Man findet die Brownsche Formel, umgeschrieben auf den dimensionslosen Wert k und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in meiner eingangs angeführten Arbeit (Gl. 22b und 23).

bei dem stark gekrümmten Bogen $\frac{a}{h}=5$ nur rd. 4 v. H. ausmacht und für schwächere Krümmung rasch abfällt. Da es uns im weiteren auf die Ermittlung des weitaus größeren Einflusses des Wölbwiderstandes ankommt, so wollen wir einfach $\tau=0$ setzen und schreiben nun Gl. (36) mit einem nur vom Parameter p abhängigen Beiwert $\vartheta(p)$ zweckmäßig in der Form

$$k=[k]\,\vartheta(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und es ist, wie der Vergleich mit (36) und (37) zeigt,

$$\vartheta(p)=\frac{1}{\pi\lambda\Phi}\left[\left(\frac{3\pi^2}{4}-2\pi-1\right)\lambda+\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)\right] \quad (39).$$

Dieser Beiwert ϑ gestattet die Beurteilung des Einflusses des „Wölbwiderstandes" auf die Größe von k und damit auf ω^2 und auf die Grundschwingzahl der symmetrischen Eigenschwingung des an den Enden eingespannten Halbkreisbogens.

Man findet in Zahlentafel 5 eine Zusammenstellung der Beiwerte ϑ für verschiedene I-Profile nebst Angabe der aus (37) und (30) gerechneten Werte $[k]$ und Φ[11]).

Zahlentafel 4. Halbkreisbogen. Grundschwingung.

Einflußzahl τ (Gl. 35) für Drehungsträgheit in Abhängigkeit von a/h und vom Profil.

I-Profil	Einflußzahl τ für Drehungsträgheit		
	$a/h=5$	10	20
8	0·0416	0·0104	0·00260
10	0·0412	0·0103	0·00257
15	0·0400	0·0100	0·00250
20	0·0395	0·00988	0·00247
25	0·0393	0·00982	0·00245
30	0·0385	0·00963	0·00241
36	0·0380	0·00950	0·00237
40	0·0377	0·00942	0·00235
45	0·0374	0·00936	0·00234
50	0·0371	0·00927	0·00232
55	0·0374	0·00935	0·00234
60	0·0368	0·00921	0·00230

Zahlentafel 5. Halbkreisbogen. Grundschwingung.

Einflußzahl ϑ (Gl. 39) für Wölbwiderstand in Abhängigkeit vom Profile und von a/h. Werte der Einsenkungsfunktion Φ nach Gl. (30). Werte $[k]$ bei Vernachlässigung der Flanschbiegung und Drehungsträgheit nach Gl. (37).

I-Profil	$[k]$	$a/h=5$		$a/h=10$		$a/h=20$	
		Φ	ϑ	Φ	ϑ	Φ	ϑ
8	0·153	0·0075	5·29	0·0160	2·47	0·0255	1·55
10	0·130	0·0070	5·61	0·0154	2·55	0·0250	1·57
15	0·101	0·0063	6·17	0·0145	2·69	0·0242	1·61
20	0·088	0·0060	6·46	0·0141	2·76	0·0238	1·63
25	0·082	0·0059	6·61	0·0139	2·80	0·0236	1·64
30	0·081	0·0063	6·17	0·0146	2·66	0·0242	1·60
36	0·081	0·0068	5·72	0·0154	2·52	0·0249	1·56
40	0·081	0·0070	5·54	0·0157	2·47	0·0250	1·55
45	0·081	0·0073	5·34	0·0161	2·41	0·0255	1·52
50	0·081	0·0075	5·18	0·0164	2·36	0·0257	1·51
55	0·081	0·0076	5·13	0·0166	2·34	0·0258	1·50
60	0·082	0·0078	4·94	0·0170	2·29	0·0261	1·48

Dieser Zahlentafel ist zu entnehmen, daß sich die versteifende Wirkung des Wölbwiderstandes in einer sehr beträchtlichen Erhöhung des Wertes k und damit auch der Grundschwingzahl ω äußert. Dieser Einfluß wächst mit zunehmender Bogenkrümmung, er ist aber von der Profilhöhe nahezu unabhängig. Bei einem Bogenträger $\frac{a}{h}=5$ steigt der Wert $[k]$ infolge des Wölbwiderstandes auf das rund 5fache an, was einer Erhöhung der Grundfrequenz ω auf mehr als das Doppelte gleichkommt; aber auch bei dem viel schwächer gekrümmten Bogenträger $\frac{a}{h}=20$ bewirkt der Wölbwiderstand noch eine Erhöhung der Grundfrequenz um rd. 20 v. H. Beim Vergleiche der ϑ und τ Werte erkennt man auch die Zulässigkeit der Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit bei Berechnung des Einflusses der Flanschenbiegung.

[11]) Die gleichzeitig in der Zahlentafel eingetragenen Werte Φ ermöglichen — da $v_0=\frac{Pa^3}{2C}\Phi$ — die unmittelbare Berechnung der Scheitelsenkung v_0 des mit der Scheitellast P belasteten Balkenträgers.

Das plastische Verhalten von dünnwandigen Rohren unter statischem Innendruck.

(Mitteilung aus der Versuchsanstalt der Fried. Krupp A. G., Essen.)

Von *R. Moufang*.

Einleitung.

1. Im folgenden wird der Spannungs- und Verformungszustand eines dünnwandigen Hohlzylinders mit kreisförmigem Querschnitt behandelt unter der Einwirkung eines auf der ganzen Rohrlänge wirkenden hydrostatischen Innendruckes p, der das Rohr plastisch beansprucht. Auf den äußeren Zylindermantel und auf die Endflächen des Hohlzylinders sollen keine Kräfte wirken.

2. Zur Ermittlung des Spannungstensors $\mathfrak{P}$ und des Verzerrungstensors $\mathfrak{S}$, die zu diesem Problem gehören, nehmen wir an, daß allgemein das plastische Verhalten beschrieben wird durch die folgenden Grundgesetze:

a) $\dfrac{\mathfrak{P}'}{\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} = \dfrac{\mathfrak{S}'}{\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}}$ (Ansatz von de St. Venant-Mises),

b) $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = f(\sqrt{(\mathfrak{S}')^2})$ (Verfestigungsgesetz von R. Schmidt[1]),

c) Incompressibilität.

Hierin bedeutet $\mathfrak{P}'$ den Deviator von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}'$ den Deviator von $\mathfrak{S}$; $(\mathfrak{P}')^2$ bzw. $(\mathfrak{S}')^2$ bedeutet das skalare Produkt von $\mathfrak{P}'$ bzw. $\mathfrak{S}'$ mit sich selbst. Der Ansatz a) ist äquivalent mit der Aussage, daß $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{S}'$ zueinander proportional sind, wobei der Proportionalitätsfaktor $\dfrac{\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}}{\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}}$ ortsveränderlich ist.

In der Aussage b) ist f eine Funktion, die für alle Beanspruchungsarten dieselbe ist und daher etwa aus einem Zugversuch empirisch ermittelt werden kann. In diesem Falle reduziert sich $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$ auf $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_z$, $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ unter der Annahme verschwindender Volumendehnung (gemäß c)) auf $\sqrt{\frac{3}{2}}\,\varepsilon_z$; die Verlängerung ε_z und die wahre Spannung σ_z oberhalb der Fließgrenze sind bekannt, so daß die Verfestigungskurve $y = f(x)$ gegeben ist durch die Punkte mit den Koordinaten $x = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\varepsilon_z$, $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_z$. Dieser Kurvenast geht unterhalb der Fließgrenze in die Hookesche Gerade über. Für einen Werkstoff, bei dem die Verfestigungskurve mit schwacher Krümmung ansteigt, kann man f näherungsweise als lineare Funktion seines Argumentes ansetzen

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \alpha\sqrt{(\mathfrak{S}')^2} + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b'),$$

wo α, β Konstanten von der Dimension einer Spannung sind[2]) (lineare Verfestigung). Dieser Fall wird uns in § 3 besonders beschäftigen. Da die Hookesche Gerade praktisch nahezu mit einem Stück der Ordinatenachse zusammenfällt und an ihrem Endpunkt, wo σ_z die Fließgrenze $\sigma_{\text{fl.}}$ beim Zugversuch erreicht hat, in die Verfestigungsgerade (b') übergeht, erkennt man, daß nahezu

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_{\text{fl.}}$$

gesetzt werden kann. Im elastischen Bereich ist eine Beziehung (b') gültig mit $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$; im idealplastischen Bereich (Fließen unter konstanter Spannung) besteht eine Beziehung (b') mit $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Da wir im folgenden das Verhalten des Werkstoffes im eigentlichen Verfestigungsgebiet untersuchen wollen, ist in den Rechnungen des § 2 beständig $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ anzunehmen.

Praktisch ist nur der Teil der Verfestigungskurve von der Fließgrenze bis zum Eintreten des Bruches von Bedeutung, da die Funktion f für Werte ihres Argumentes, die größer sind als $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ bei dem Bruch, physikalisch nicht mehr bestimmt ist. Die Verfestigungskurve wird ermittelt durch Angabe diskreter auf ihr gelegener Punkte. Für die rechnerische Behandlung ist es erforderlich, f durch einen analytischen Ausdruck darzustellen, der sich den gemessenen Werten möglichst gut anschmiegt. Ist σ_z die wahre Spannung (bezogen auf den jeweiligen

[1]) R. Schmidt, Ing.-Arch. Bd. 3 (1932), S. 215. — Für Quadratwurzeln ist hier und im folgenden stets nur der absolute Wert zu nehmen. Wir bezeichnen dies nicht besonders durch Absolutstriche.

[2]) $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ ist ein Skalar; f hat stets die Dimension einer Spannung.

Querschnitt), so ergeben die gemessenen Werte den Teil einer monoton ansteigenden Kurve mit monoton abfallender Tangentenrichtung und negativer Krümmung (z. B. einen Parabelbogen, wobei die Achsenrichtung der Parabel mit der Abszissenachse zusammenfällt). Bei dem hier vorliegenden Problem der plastischen Spannungsverteilung von dünnwandigen Rohren zeigt sich, daß bei der rechnerischen Behandlung der analytische Ausdruck von f nicht nur in dem natürlichen Intervall für $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ herangezogen werden muß, sondern man braucht auch noch Aussagen über das Verhalten von f und seiner Ableitungen für hinreichend große Werte des Argumentes (§ 4). Dabei ist es notwendig, der analytisch gegebenen Funktion f für hinreichend große Argumente gewisse einschränkende Bedingungen aufzuerlegen; dies ist physikalisch belanglos, solange f dem natürlichen Verlauf der Verfestigungskurve in dem physikalisch gegebenen Intervall Rechnung trägt.

3. Wir schließen die Einleitung mit einer Übersicht über die folgenden Untersuchungen: Wir nehmen an, daß die Verformungen des Rohres nicht zu groß sind, so daß der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen in der üblichen Weise in der linearen Form angenommen werden kann, woraus sich die Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungskomponenten ebenfalls in linearer Form ergeben. Die Grundgesetze a) bis c) gestatten, die Verzerrungen als Funktionen der Spannungen darzustellen, so daß man aus den Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen Differentialgleichungen für die Spannungen erhält. Diese reichen zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Spannungen gerade aus. Bei der Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen hat man die Randbedingungen für die Spannungen zu berücksichtigen (§ 1). Das System ist leicht zu lösen unter der Annahme, daß alle Schubspannungen identisch verschwinden und die Normalspannungen in jedem Querschnitt des Hohlzylinders denselben Wert haben. Dann ist aber die Randbedingung der Kräftefreiheit an den Enden nur in der abgeschwächten Form erfüllbar, daß die auf die Stirnfläche wirkende Gesamtkraft verschwindet (ohne daß jeder Punkt der Stirnfläche kräftefrei ist). Die Randbedingungen an den Mänteln sind streng erfüllt (§ 2). Ist die Wandstärke des Hohlzylinders gering, so fällt die Abschwächung der Randbedingung an den Enden wenig ins Gewicht. Unter Annahme einer linearen Verfestigungsfunktion werden die Formeln für die Spannungen und die Verzerrungen in Form von Potenzreihen angegeben, die alle charakteristischen Eigenschaften der Spannungsverteilung erkennen lassen. Es zeigt sich insbesondere, daß die Spannungskomponenten nur in unwesentlicher Weise bei hinreichend kleiner Wandstärke von der (als linear angenommenen) Verfestigungsfunktion abhängen (§ 3). Dieses Resultat läßt sich auf nicht lineare Verfestigungsfunktionen f, die bestimmten Bedingungen genügen, ausdehnen: In erster Näherung ist die Spannungsverteilung in dünnwandigen Rohren von dem speziellen Verlauf der Verfestigung unabhängig, wenn man die obengenannten physikalischen Grundgesetze für das plastische Verhalten als gültig ansieht und sich auf so kleine Verformungen beschränkt, daß der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verformung nicht aufhört, näherungsweise linear zu sein.

Die Verzerrungen und Verschiebungen sind im Gegensatz zu den Spannungen nicht unabhängig von dem Verlauf der Verfestigungskurve.

§ 1. Aufstellung der Differentialgleichungen für die Spannungskomponenten.

1. Die Punkte des Rohres seien auf ein System von Zylinderkoordinaten r, ϑ, z bezogen; die z-Achse falle mit der Zylinderachse zusammen, die Ebene $z=0$ gehe durch die Mitte des Zylinders, der von den Ebenen $z=+\mathfrak{L}$, $z=-\mathfrak{L}$ begrenzt wird. Die Ebene $\vartheta=0$ durch die z-Achse sei beliebig gewählt. Aus Gründen der Rotationssymmetrie des vorliegenden Problems sind alle Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungskomponenten nur abhängig von r und z. Überdies erkennt man sofort, daß die Komponenten $\tau_{r\vartheta}$ und $\tau_{z\vartheta}$ identisch verschwinden müssen. $\mathfrak{P}$ hat also von vornherein nur die Komponenten σ_r, σ_ϑ, σ_z, $\tau_{rz}\equiv\tau$, also hat $\mathfrak{P}'$ die Komponenten σ_r-s, $\sigma_\vartheta-s$, σ_z-s, τ mit $s=\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\vartheta+\sigma_z)$. Wegen a) ist mithin auch $\gamma_{r\vartheta}\equiv 0\equiv\gamma_{z\vartheta}$, so daß $\mathfrak{E}$ die Komponenten hat: ε_r, ε_ϑ, ε_z, $\frac{1}{2}\gamma_{rz}\equiv\frac{1}{2}\gamma$. Da nach c) die Volumendehnung $\varepsilon_r+\varepsilon_z+\varepsilon_\vartheta$ verschwindet, ist

$$\mathfrak{E}'\equiv\mathfrak{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c^*).$$

Die Verzerrungen hängen mit der Verschiebung u in radialer Richtung und der Verschiebung w in axialer Richtung zusammen durch die Formeln

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\vartheta=\frac{u}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

XUM

Die Verschiebung in tangentialer Richtung ist Null. Die Formeln (1) gelten nur, wenn die Verformungen nicht zu groß werden. Aus (1) ergeben sich nach Elimination von u und w die Verträglichkeitsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}(r\,\varepsilon_\vartheta)-\varepsilon_r=0,\\ &\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r}+r\frac{\partial^2 \varepsilon_\vartheta}{\partial z^2}-\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Aus a), b), (c*) folgt

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r=\frac{2\sigma_r-\sigma_\vartheta-\sigma_z}{3}\,g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}), \quad \varepsilon_\vartheta=\frac{2\sigma_\vartheta-\sigma_r-\sigma_z}{3}\,g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}),\\ &\varepsilon_z=\frac{2\sigma_z-\sigma_r-\sigma_\vartheta}{3}\,g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}), \quad \frac{\gamma}{2}=\tau\,g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

mit

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\sigma_r^2+\sigma_\vartheta^2+\sigma_z^2-\sigma_r\sigma_\vartheta-\sigma_\vartheta\sigma_z-\sigma_z\sigma_r+3\tau^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})=\frac{\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}}{\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

wobei $\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}$ vermöge b) eine Funktion von $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$ ist, da wir annehmen, daß f nirgends eine verschwindende Ableitung hat. Setzt man also

$$\sqrt{(\mathfrak{S}')^2}=\sqrt{(\mathfrak{S})^2}=f^*(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

so wird

$$g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})=\frac{f^*(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})}{\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5a),$$

wobei identisch in x gilt

$$f(f^*(x))=x=f^*(f(x)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Trägt man (3) in (2) ein, so ergeben sich 2 partielle Differentialgleichungen für die Spannungskomponenten.

Weiterhin stehen die Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\vartheta}{r}+\frac{\partial \tau}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{\tau}{r}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Damit hat man insgesamt 4 partielle Differentialgleichungen für die 4 unbekannten Funktionen σ_r, σ_ϑ, σ_z, τ.

Diese Differentialgleichungen sind aufzulösen mit den Randbedingungen (R_a = Außenradius, R_i = Innenradius des Rohres):

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r=-p, \quad \tau=0 \text{ für } r=R_i, \text{ identisch in } z,\\ &\sigma_r=0, \quad \tau=0 \text{ für } r=R_a, \text{ identisch in } z,\\ &\sigma_z=0, \quad \tau=0 \text{ für } z=\pm\,\mathfrak{L}, \text{ identisch in } r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Diese mathematische Formulierung der in der Einleitung ausgesprochenen Randbedingungen für die Spannungen setzt voraus, daß die Verformung des Rohres nahezu in einer homogenen Aufweitung besteht, und daß diese Aufweitung nicht zu groß ist, so daß es näherungsweise erlaubt ist, die Randbedingungen am unverformten Zylinder zu erfüllen.

Für die weitere Rechnung empfiehlt es sich, dimensionslose Veränderliche einzufügen. Vermöge der Substitutionen

$$\bar{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{p}, \quad \bar{\sigma}_\vartheta=\frac{\sigma_\vartheta}{p}, \quad \bar{\sigma}_z=\frac{\sigma_z}{p}, \quad \bar{\tau}=\frac{\tau}{p}, \quad \bar{r}=\frac{r}{R_a}, \quad \bar{z}=\frac{z}{R_a} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

erhält man aus (8) die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial \bar{r}}+\frac{\bar{\sigma}_r-\bar{\sigma}_\vartheta}{\bar{r}}+\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{z}}=0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{r}}+\frac{\bar{\tau}}{\bar{r}}+\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial \bar{z}}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\bar{8})$$

für die dimensionslosen Funktionen $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\vartheta$, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}$ als Funktionen der dimensionslosen Argumente $\bar{r}$, $\bar{z}$. Die Verzerrungen gehen durch die obige Transformation der unabhängigen Variablen über in

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \frac{2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\vartheta - \bar{\sigma}_z}{3} \cdot \bar{g}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right), \quad \bar{\varepsilon}_\vartheta = \frac{2\bar{\sigma}_\vartheta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z}{3} \cdot \bar{g}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right), \\ \bar{\varepsilon}_z &= \frac{2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\vartheta}{3} \cdot \bar{g}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right), \quad \frac{\bar{\gamma}}{2} = \bar{\tau} \cdot \bar{g}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\bar{3}),$$

dabei ist

$$(\bar{\mathfrak{P}}')^2 = \frac{1}{p^2}(\mathfrak{P}')^2$$

und

$$\bar{g}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right) = \frac{\sqrt{(\bar{\mathfrak{S}})^2}}{\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}} = \frac{\sqrt{(\bar{\mathfrak{S}})^2}}{\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}} = \frac{\bar{f}^*\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}\right)}{\sqrt{(\bar{\mathfrak{P}}')^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\bar{5})$$

mit

$$\bar{f}\left(\sqrt{(\bar{\mathfrak{S}})^2}\right) = \frac{f\left(\sqrt{(\mathfrak{S})^2}\right)}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{b}')$$

und

$$\bar{f}^*\left(\bar{f}(x)\right) \equiv x \equiv \bar{f}\left(\bar{f}^*(x)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\bar{7}).$$

Für die dimensionslosen Verzerrungen $\bar{\varepsilon}_r$ usw. als Funktionen von $\bar{r}$ und $\bar{z}$ gelten die Verträglichkeitsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r}\,\bar{\varepsilon}_\vartheta) - \bar{\varepsilon}_r = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \bar{r}} + \bar{r}\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_\vartheta}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\bar{2}).$$

Wir unterdrücken künftig der Einfachheit halber in ($\bar{2}$), ($\bar{3}$), ($\bar{8}$) die Querstriche wieder und bezeichnen im folgenden mit σ_r, σ_ϑ, σ_z, τ die Spannungen bezogen auf den Innendruck als Einheit, mit r, z den radialen und vertikalen Abstand eines Punktes bezogen auf den Außenradius des Rohres als Einheit.

2. Unter der Voraussetzung, daß

$$\frac{\partial (\mathfrak{P}')^2}{\partial z} \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist, liefert die Substitution von (3) in (2) mit der Abkürzung

$$\frac{1}{g\left(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\right)} \cdot \frac{d\,g\left(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\right)}{d\,r} = \Psi\left(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\right) = \Phi(r)\ ^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen das System

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \\ &3(\sigma_\vartheta - \sigma_r) + r(2\sigma_\vartheta - \sigma_r - \sigma_z)\Phi + r\frac{\partial}{\partial r}(2\sigma_\vartheta - \sigma_r - \sigma_z) = 0, \\ &r\frac{\partial^2}{\partial z^2}(2\sigma_\vartheta - \sigma_r - \sigma_z) + \frac{\partial}{\partial r}(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\vartheta) + (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\vartheta)\Phi - 6\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Die Randbedingungen (9) lauten jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = -1, \quad \tau = 0 \quad \text{für } r = \frac{R_i}{R_a} \equiv m, \quad \text{identisch in } z, \\ &\sigma_r = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{für } r = 1, \quad \text{identisch in } z, \\ &\sigma_z = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{für } z = \pm\frac{\mathfrak{L}}{R_a} \equiv \pm l, \quad \text{identisch in } r \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}).$$

Die Voraussetzung (11) ist sicher erfüllt, wenn insbesondere alle Spannungskomponenten nur von r abhängen. Nur mit diesem Falle werden wir uns im folgenden befassen.

§ 2. Lösung der Differentialgleichungen mit dem Ansatz identisch verschwindender Schubspannungen und Unabhängigkeit aller Spannungskomponenten von z.

1. Der physikalisch naheliegende Ansatz

$$\tau \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

[3]) Wegen unserer Voraussetzungen über die Funktion f auf Seite 24 ist $\Phi(r) \not\equiv 0$.

liefert nach (I, 2)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

was mit Rücksicht auf die Randbedingungen für σ_z zur Folge hat

$$\sigma_z \equiv 0.$$

Damit reduziert sich aber (I) auf ein System von 3 Bedingungen für σ_r, σ_ϑ, die im allgemeinen unverträglich sind. Hält man also an (13) fest, so muß man die Randbedingung für σ_z in der scharfen Form fallen lassen. Lassen wir von vornherein die Frage offen, welchen abgeschwächten Bedingungen σ_z an den Enden des Hohlzylinders unterworfen werden kann, und gehen wir mit dem Ansatz (13) und den weiteren Annahmen

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial z} \equiv 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

in (I) hinein. Bei einem langen dünnwandigen Rohr sind die Hypothesen (13) und (15) von vornherein naheliegend; es zeigt sich, daß sie in der Tat bei dünnwandigen Rohren ein brauchbares Resultat liefern.

Das System (I) reduziert sich dann auf

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \\ &3(\sigma_\vartheta - \sigma_r) + (2\sigma_\vartheta - \sigma_r - \sigma_z)\, r\, \Phi + r \frac{d}{dr}(2\sigma_\vartheta - \sigma_r - \sigma_z) = 0, \\ &\frac{d}{dr}(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\vartheta) + (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\vartheta)\, \Phi = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

mit $\Phi(r)$ aus (12) bei gegebenem g; als Funktion von $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$ ist Φ bekannt, aber nicht als Funktion von r. Die allgemeine Lösung von (A) lautet

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= c_0 + \frac{2}{3} c_1 \int_1^r \frac{\Phi_1(r)}{r^3}\, dr, \\ \sigma_\vartheta &= c_0 + \frac{2}{3} c_1 \int_1^r \frac{\Phi_1(r)}{r^3}\, dr + \frac{2}{3} \frac{c_1}{r^2} \Phi_1(r), \\ \sigma_z &= c_0 + \frac{2}{3} c_1 \int_1^r \frac{\Phi_1(r)}{r^3}\, dr + \frac{1}{3}\left(\frac{c_1}{r^2} + \frac{3}{2} c_2\right) \Phi_1(r) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

c_0, c_1, c_2 sind Integrationskonstanten, ferner ist

$$\Phi_1(r) = \frac{f(\sqrt{b(r)} \cdot g(\sqrt{b(1)}))}{\sqrt{b(r)}}, \qquad b(r) = \frac{1}{9}\left(\frac{2 c_1^2}{r^4} + \frac{3}{2} c_2^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (16\text{a});$$

f ist die dimensionslos gemachte Verfestigungsfunktion; das Produkt aus g und seinem Argument ist die Umkehrfunktion von f (nach (b′) und (5)).

Zur Herleitung der Formeln (16) und (16a) betrachtete man (A) als lineare Differentialgleichungen für σ_r, σ_ϑ, σ_z, wobei $\Phi(r)$ als eine vorläufig unbekannte, nachträglich geeignet zu bestimmende Funktion angesehen wird. Dann ergeben sich zunächst als allgemeine Lösung von (A) die Formeln (16) mit

$$\Phi_1 = e^{-\int_1^r \Phi(r)\, dr}.$$

Unter Beachtung von (12) ist

$$\Phi_1 = e^{-\int_1^r \Phi(r)\, dr} = \frac{g(\sqrt{(\mathfrak{P}'(1))^2})^{4})}{g(\sqrt{(\mathfrak{P}'(r))^2})} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Weiterhin folgt aus (16)

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\vartheta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\vartheta - \sigma_\vartheta \sigma_z - \sigma_z \sigma_r}} = \sqrt{b(r)} \cdot \Phi_1(r) \quad \ldots \quad (18)$$

[4]) Hier ist der Deutlichkeit halber gesetzt worden $\mathfrak{P}'(r) = \mathfrak{P}'$. $\mathfrak{P}'(1)$ bedeutet den Wert von $\mathfrak{P}'$, wenn alle Spannungskomponenten an der Stelle $r = 1$ genommen werden.

mit

$$b(r)=\frac{1}{9}\left(\frac{2c_1^2}{r^4}+\frac{3}{2}c_2^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18a),$$

also liefert (17) und (18) für $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$ die Gleichung

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}=\sqrt{b(r)}\cdot\frac{g(\sqrt{(\mathfrak{P}'(1))^2})}{g(\sqrt{(\mathfrak{P}'(r))^2})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Hieraus gewinnt man sofort $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$ als Funktion von r:

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\cdot g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})=\sqrt{b(r)}\cdot g(\sqrt{(\mathfrak{P}'(1))^2}),$$

daraus folgt für $r=1$

$$\sqrt{(\mathfrak{P}'(1))^2}=\sqrt{b(1)},$$

also

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\cdot g(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})=\sqrt{b(r)}\cdot g(\sqrt{b(1)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

und nach (5a)

$$f^*(\sqrt{(\mathfrak{P}')^2})=\sqrt{b(r)}\cdot g(\sqrt{b(1)}),$$

woraus man nach (7) schließt

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}=f(\sqrt{b(r)}\cdot g(\sqrt{b(1)})) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Kombiniert man endlich (21) mit (18), so ergibt sich die behauptete Beziehung (16a).

2. Über die Integrationskonstanten c_i in (16) wird zunächst so verfügt, daß die Randbedingungen für σ_r an den Mänteln des Rohres erfüllt sind. Das liefert für $r=1$

$$c_0=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

und für $r=m$

$$\frac{2}{3}c_1\int_1^m\frac{\Phi_1(r)}{r^3}\,dr=-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Eine zweite Gleichung zwischen c_1 und c_2 kann man erhalten durch die Forderung, daß an den Zylinderenden (also auch in jedem Querschnitt des Rohres) die Gesamtkraft verschwinden soll, d. h.

$$\int_1^m r\,\sigma_z(r)\,dr=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III),$$

eine Forderung, die weniger verlangt, als daß in jedem Punkte der Stirnflächen eine verschwindende Kraft angreifen soll. Für c_1 und c_2 liefert (III) die Bedingung

$$\int_1^m r\left\{2c_1\int_1^r\frac{\Phi_1(r)}{r^3}\,dr+\left(\frac{c_1}{r^2}+\frac{3}{2}c_2\right)\Phi_1(r)\right\}dr=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Bestimmt man die c_i gemäß (22), (23), (24), so stellen die Spannungskomponenten (16) eine Lösung des Problems (I), (II) dar, sofern man die letzte Bedingung (II) ersetzt durch die schwächere Forderung (III). Zu dem Spannungszustand (16) läßt sich nach (3) sofort der Verformungszustand angeben; aus (3), (16) und (16a) folgt unter Beachtung von (5a) und (7)

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=-\frac{1}{3}\left(\frac{c_1}{r^2}+\frac{c_2}{2}\right)\cdot g(\sqrt{b(1)}),\qquad \varepsilon_\vartheta=\frac{1}{3}\left(\frac{c_1}{r^2}-\frac{c_2}{2}\right)\cdot g(\sqrt{b(1)}),\\&\varepsilon_z=\frac{c_2}{3}g(\sqrt{b(1)}),\qquad \gamma\equiv 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

und weiterhin die auf R_a bezogenen Verschiebungen

$$u=\frac{1}{3}\left(\frac{c_1}{r}-\frac{c_2}{2}r\right)g(\sqrt{b(1)}),\qquad w=\frac{c_2}{3}g(\sqrt{b(1)})\cdot z \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

Aus (26) entnimmt man, daß in der Tat die Verformung des Rohres in einer homogenen Aufweitung besteht (wie im elastischen Falle); die Erzeugenden des Hohlzylinders verschieben sich parallel zu sich selbst, und ebene Querschnitte bleiben eben. Die Formulierung der Randbedingungen in der Form (9) bzw. (II) ist also zulässig, wenn die Aufweitung des Rohres nicht zu groß ist.

Wir gehen hier auf die Auflösung der Gl. (23) und (24) nach c_1 und c_2 nicht ein, sondern wir beschränken uns im folgenden auf die explizite Durchrechnung bei dünnwandigen Rohren, wo die Forderung (III) eine ausreichende Näherung für die strenge Randbedingung in σ_z darstellt.

XUM

§ 3. Auswertung der Lösung für den dünnwandigen Hohlzylinder bei Annahme linearer Verfestigung.

1. In diesem § wird gesetzt

$$\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = f\left(\sqrt{(\mathfrak{S})^2}\right) = \frac{\alpha}{p}\sqrt{(\mathfrak{S})^2} + \frac{\beta}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

mit konstanten nicht verschwindenden α, β. Dann wird nach (16a)

$$\Phi_1(r) = 1 + \frac{d}{\sqrt{b(r)}} - \frac{d}{\sqrt{b(1)}}, \qquad d = \frac{\beta}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

2. Für geringe Wandstärke ist die (dimensionslose) Variable r für alle in Frage kommenden Punkte nahezu gleich 1, und man kann setzen

$$r = 1 - h, \qquad h = 1 - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

wo h eine nicht negative klein bleibende Veränderliche ist in dem Intervall

$$0 \leq h \leq 1 - m \equiv \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungskomponenten lassen sich in Potenzreihen nach h entwickeln. Es genügt, die ersten Glieder dieser Entwicklungen zu berechnen.

Wir entwickeln zunächst $\Phi_1(1-h)$ in einer Potenzreihe nach h. Dazu braucht man die Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{b(r)}} = \frac{3}{\left(\frac{2c_1^2}{(1-h)^4} + \frac{3}{2}c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3(1-2h+h^2)}{\lambda - \frac{3}{\lambda}c_2^2 h + \frac{9}{2\lambda^3}(c_2^2\lambda^2 - c_2^4)h^2 + \ldots}$$

mit

$$\lambda = \sqrt{2c_1^2 + \frac{3}{2}c_2^2} = 3\sqrt{b(1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Ferner sei[5])

$$\frac{c_2}{\lambda} = \frac{c_2}{\sqrt{2c_1^2 + \frac{3}{2}c_2^2}} = \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32);$$

mithin ist

$$\frac{1}{\sqrt{b(r)}} = \frac{3(1-2h+h^2)}{\lambda - 3c_2\varrho h + \frac{9}{2}c_2\varrho(1-\varrho^2)h^2 + \ldots}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{\sqrt{b(r)}} = \frac{3}{\lambda}\left(1 + (3\varrho^2 - 2)h + \left(1 - \frac{21}{2}\varrho^2 + \frac{27}{2}\varrho^4\right)h^2 + \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Man schließt durch vollständige Induktion, daß in der rechts in der Klammer stehenden Potenzreihe der Koeffizient von h^n ein Polynom $Q_n(\varrho^2)$ n-ten Grades in ϱ^2 mit numerischen Koeffizienten ist:

$$\frac{1}{\sqrt{b(r)}} = \frac{3}{\lambda}\left(1 + \sum_n Q_n(\varrho^2)h^n\right) = \frac{1}{\sqrt{b(1)}}\left(1 + \sum_n Q_n(\varrho^2)h^n\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Es folgt nach (28)

$$\Phi_1(r) = 1 + \frac{d}{\sqrt{b(1)}}\sum_n Q_n(\varrho^2)h^n = 1 + \frac{3\varrho}{c_2}d\sum_n Q_n(\varrho^2)h^n \equiv 1 + \sum_n a_n h^n \quad . \quad . \quad (35),$$

womit die Koeffizienten a_n in der Entwicklung von $\Phi_1(1-h)$ bestimmt sind. Diese Entwicklung hat für festes μ einen Konvergenzradius, der von $\frac{c_2}{c_1}$ abhängt.

Nach den Formeln (16) mit $c_0 = 0$ folgen jetzt für die Spannungskomponenten die Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{2}{3}c_1\left(h + (a_1+3)\frac{h^2}{2} + (3a_1 + a_2 + 6)\frac{h^3}{3} + \cdots\right),\\
\sigma_\vartheta &= \frac{2}{3}c_1\left(1 + (1+a_1)h + \frac{(2a_2 + 3a_1 + 3)}{2}h^2 + \cdots\right),\\
\sigma_z &= \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2} + \left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2}\right)a_1 h + \left\{\left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2}\right)a_2 + \frac{a_1 c_1}{3}\right\}h^2 + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

[5]) Da in (16) $c_0 = 0$ zu setzen ist, ist wegen der Randbedingung $\sigma_r = 0$ für $r = 1$ sicher $c_1 \neq 0$, da sonst σ_r identisch Null wäre. Ferner muß auch $c_2 \neq 0$ sein, da sonst $\varepsilon_z = 0$ wäre.

worin alle Koeffizienten ganze lineare Funktionen der a_i sind. Die a_i sind dabei aus (35) zu entnehmen. Die Werte (36) genügen identisch in c_1 und c_2 den Gleichungen (A) bis zu den Gliedern erster Ordnung in h, falls man in (36) mit den quadratischen Gliedern abbricht.

3. Wir bestimmen jetzt c_1 und c_2 aus den Randbedingungen. Die Forderung $\sigma_r = 0$ am Außenmantel ($h = 0$) ist bereits erfüllt. Am Innenmantel ($h = 1 - m = \mu$) wird

$$\frac{2}{3} c_1 \mu \left\{1 + (a_1 + 3)\frac{\mu}{2} + (3a_1 + a_2 + 6)\frac{\mu^2}{3} + \cdots\right\} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Die Randbedingung für σ_z in der Form (III) liefert

$$\int_0^{1-m} (1-h)\,\sigma_z\,dh = 0\,,$$

also

$$\left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2}\right)\left\{1 + \frac{\mu}{2}(a_1 - 1) + \frac{\mu^2}{3}(a_2 - a_1)\right\} + \frac{a_1 c_1}{9}\mu^2 + \cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Dabei ist μ so klein zu wählen, daß für $h = \mu$ sowohl σ_r als auch das obige Integral über $(1-h)\,\sigma_z$ noch konvergiert.

Die Gl. (37), (38) legen es nahe, für c_1 und c_2 den Ansatz zu versuchen

$$\mu c_1 = c_{10} + c_{11}\mu + c_{12}\mu^2 + \cdots \quad (c_{10} \neq 0), \qquad \mu c_2 = c_{20} + c_{21}\mu + c_{22}\mu^2 + \cdots \quad (c_{20} \neq 0) \quad (39)$$

mit konstanten c_{1i}, c_{2i}. Dann wird

$$\frac{c_2}{c_1} = C_0 + C_1 \cdot \mu + C_2 \cdot \mu^2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Für ϱ bekommt man nach (32) und (40) eine Entwicklung nach μ, die mit dem absoluten Glied (abgesehen vom Vorzeichen)

$$\frac{C_0}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{3}{4}C_0^2}} \neq 0$$

beginnt. Auch diese Entwicklung hat einen von Null verschiedenen Konvergenzradius, wenn die Entwicklungen (39) einen solchen haben. Aus (35) entnimmt man weiter, daß sich alle a_n als Potenzreihen von μ darstellen lassen, die wegen des Faktors $\frac{\varrho}{c_2}$ mindestens mit der ersten Potenz von μ beginnen. Wir setzen

$$a_n = \sum_k A_{nk}\,\mu^k \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Diese Entwicklungen trage man zusammen mit (39) in (37) und (38) ein und ordne die linken Seiten nach Potenzen von μ. Durch Koeffizientenvergleichung in bezug auf μ ergibt sich ein System von Gleichungen für die c_{1i} und c_{2i}, des näheren erhält man rekursiv ein System von linearen Gleichungen. Man hat aus (37) zunächst

$$c_{10} = \frac{3}{2}\,, \qquad c_{11} = -\frac{9}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

also aus (38)

$$c_{20} = -1\,, \qquad c_{21} = \frac{3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

daraus

$$C_0 = -\frac{2}{3}\,, \qquad C_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Nach (32) findet man jetzt die beiden ersten Koeffizienten in der Entwicklung von ϱ zu

$$\varrho = -\frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \mu + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

womit in allen a_n die beiden ersten Koeffizienten A_{n1}, A_{n2} festgelegt sind. Wegen

$$a_1 = \frac{3\varrho d}{c_2}(3\varrho^2 - 2) = \sum_k A_{1k}\,\mu^k\,, \qquad a_2 = \frac{3\varrho d}{c_2}\left(1 - \frac{21}{2}\varrho^2 + \frac{27}{2}\varrho^4\right) = \sum_k A_{2k}\,\mu^k \quad (46)$$

wird insbesondere

$$A_{11}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d,\qquad A_{12}=-\frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d,\qquad A_{21}=-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d,\qquad A_{22}=-\frac{9}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,. \quad (47).$$

Jetzt berechnet man nach (37) und (38) die Koeffizienten c_{12} aus einer linearen Beziehung. Es wird

$$c_{12}=\frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{3}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42a),$$

$$c_{22}=-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d-\frac{1}{4}\ ^{6)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43a).$$

Das Paar c_{12}, c_{22} liefert C_2, womit in (45) der Koeffizient von μ^2 gewonnen ist, so daß sich der Koeffizient von μ^2 in (45) und alle A_{n3} berechnen lassen. So fahre man fort. Bricht man die Reihenentwicklung nach h und nach $1-m$ überall nach der zweiten Potenz ab, so lauten die Formeln (36) endgültig in dimensionsloser Form[7])

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=-\left\{h+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)-\frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)^2\right)h^2\right\}\\
&\quad\cdot\left\{1-\frac{3}{2}(1-m)+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{4}\right)(1-m)^2\right\}\cdot\frac{1}{1-m}\\
\sigma_\vartheta&=\left\{1+\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)-\frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)^2\right)h\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{3}{2}-\frac{21}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)-\frac{63}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)^2\right)h^2\right\}\\
&\quad\cdot\left\{1-\frac{3}{2}(1-m)+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{4}\right)(1-m)^2\right\}\cdot\frac{1}{1-m}\\
\sigma_z&=-\left\{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)+\frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d\,(1-m)^2\right\}h^2\\
&\quad\cdot\left\{1-\frac{3}{2}(1-m)+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{4}\right)(1-m)^2\right\}\cdot\frac{1}{1-m}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Dazu gehören nach (25) die Verzerrungen

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r&=-\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{12}\right)(1-m)^2\right.\\
&\qquad+\left(1-\frac{3}{2}(1-m)+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{4}\right)(1-m)^2\right)h\\
&\quad\left.+\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{4}(1-m)+\left(\frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{3}{8}\right)(1-m)^2\right)h^2\right\}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot g(\sqrt{b(1)})\\
\varepsilon_\vartheta&=\left\{\frac{2}{3}-(1-m)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{6}\right)(1-m)^2\right.\\
&\qquad+\left(1-\frac{3}{2}(1-m)+\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{4}\right)(1-m)^2\right)h\\
&\quad\left.+\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{4}(1-m)+\left(\frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{3}{8}\right)(1-m)^2\right)h^2\right\}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot g(\sqrt{b(1)})\\
\varepsilon_z&=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)+\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{12}\right)(1-m)^2\right)\cdot\frac{1}{1-m}\cdot g(\sqrt{b(1)})
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (49)$$

---

[6]) Die Entwicklung von $\mu\left(\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{2}\right)$ beginnt wegen (38) mit μ^3.

[7]) Sollen $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z$ die nicht dimensionslos gemachten Spannungen bedeuten, so hat man rechts in (48) den Faktor p hinzuzufügen (gemäß (10)).

und nach (26) die dimensionslosen Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} u &= \Big\{\frac{2}{3}-(1-m)+\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{6}\Big)(1-m)^2 \\ &\quad +\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)+\Big(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{12}\Big)(1-m)^2\Big)h \\ &\quad +\Big(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(1-m)+\Big(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{8}\Big)(1-m)^2\Big)h^2\Big\}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot g(\sqrt{b(1)}) \\ w &= -\Big\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)+\Big(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d+\frac{1}{12}\Big)(1-m)^2\Big\}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot g(\sqrt{b(1)})\cdot z \\ g(\sqrt{b(1)}) &= \frac{p}{a}\Big(1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d(1-m)^2\Big) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (50).$$

Für hinreichend kleines $1-m$ kann man die Formeln (48) bis (50) näherungsweise in der kürzeren Form schreiben:

$$\sigma_r = -h\Big\{1-\frac{3}{2}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m}, \qquad \sigma_\vartheta = (1+h)\Big\{1-\frac{3}{2}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m}, \qquad \sigma_z = 0 \quad (48'),$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\Big\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)+h\Big\}\frac{p}{a}\Big\{1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m} \\ \varepsilon_\vartheta &= \Big\{\frac{2}{3}-(1-m)+h\Big\}\frac{p}{a}\Big\{1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m} \\ \varepsilon_z &= -\Big\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)\Big\}\frac{p}{a}\Big\{1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49'),$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \Big\{\frac{2}{3}-(1-m)+\frac{1}{3}h\Big\}\frac{p}{a}\Big\{1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m} \\ w &= -\Big\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-m)\Big\}\frac{p}{a}\Big\{1-\frac{3d}{\sqrt{6}}(1-m)\Big\}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (50').$$

Die Aufweitung des Rohres ist also hier mit einer Längsverkürzung verbunden, die in erster Näherung die Hälfte der Umfangsaufweitung ausmacht.

4. Man entnimmt aus den Formeln (48) folgende charakteristische Eigenschaften des Spannungszustandes:

a) Bei hinreichend kleiner Wandstärke ist σ_z gegen σ_r und σ_ϑ vernachlässigbar, da es eine Größenordnung kleiner ist als σ_r. Die Tangentialspannung σ_ϑ ist am größten, sie übertrifft σ_r um eine Größenordnung; σ_ϑ ist eine Zugspannung, σ_r und σ_z sind Druckspannungen. Erst bei Berücksichtigung höherer Näherungen in den Koeffizienten von h^n kommt zum Vorschein, daß in Wahrheit σ_z längs des Querschnittes einen Vorzeichenwechsel erleidet. Der absolute Betrag von σ_r und σ_ϑ ist an der Innenwand des Hohlzylinders am größten [wie im elastischen Falle]. Folglich nimmt auch

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_r}{2}$$

seinen größten Wert am Innenrand an.

b) In den Spannungen kommt die von dem Verfestigungsgesetz herrührende Größe $d = \frac{\beta}{p}\Big(\beta\sqrt{\frac{3}{2}}$ ist die Fließgrenze$\Big)$ infinitesimal vor, da sie überall in Verbindung mit dem kleinen Faktor $\mu = 1-m$ auftritt; überdies sind die Koeffizienten der niedrigsten Potenz von h, die jeweils in den Spannungen auftritt, überhaupt von d unabhängig. Die zweite für die lineare Verfestigung charakteristische Größe $\frac{a}{p}$, also die Steigung der Verfestigungsgeraden, ist aus den Formeln (48) ganz herausgefallen. Wir haben also das Resultat, daß der Spannungszustand bei hinreichend kleiner Wandstärke für den Fall linearer Verfestigung praktisch von dem Verlauf der Verfestigungsgeraden unabhängig ist. Im folgenden werden wir dieses Resultat auch auf allgemeinere Verfestigungskurven ausdehnen.

5. In der Mitte der Wand, nämlich für

$$h = \frac{1-m}{2}$$

lauten die ersten Glieder der Entwicklungen (48)

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}, \qquad \sigma_\vartheta = \frac{1}{1-m}, \qquad \sigma_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48'').$$

Lode[8]) hat für die Spannungsverteilung in dünnwandigen Rohren unter statischem Innendruck die Formeln angegeben:

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}, \qquad \sigma_\vartheta = \frac{m}{1-m}, \qquad \sigma_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48'''),$$

die mit (48'') identisch sind, falls m hinreichend nahe bei 1 liegt, also die Wandstärke hinreichend gering ist.

§ 4. Nichtlineare Verfestigung.

1. Die bei Annahme eines linearen Verfestigungsgesetzes erhaltenen Potenzreihenentwicklungen für die Spannungen waren wesentlich beeinflußt durch die folgenden Tatsachen: Die Entwicklung für $\Phi_1(1-h)$ hatte das Absolutglied 1 und die Eigenschaft, daß alle übrigen Koeffizienten a_n mit abnehmender Wandstärke gegen Null streben; c_1 und c_2 waren je in eine mit $(1-m)^{-1}$ beginnende Laurentreihe nach $1-m$ entwickelbar. Ist f nichtlinear, so beginnt die Entwicklung für $\Phi_1(1-h)$ ebenfalls mit 1 und die übrigen Koeffizienten a_i streben mit abnehmender Wandstärke endlichen Grenzwerten zu [nicht notwendig den Grenzwerten 0], wenn man über f geeignete Voraussetzungen macht, und c_1, c_2 sind in derselben Weise nach μ entwickelbar wie im Falle eines linearen f. Die beiden letzten Aussagen sind bei allgemeinem f ebenso miteinander verflochten wie bei linearem f.

2. Zum Beweise greifen wir zurück auf (16) und

$$\Phi_1(r) = \frac{f(\sqrt{b(r)}\cdot g(\sqrt{b(1)}))}{\sqrt{b(r)}}, \qquad b(r) = \frac{1}{9}\left(\frac{2c_1^2}{r^4} + \frac{3}{2}c_2^2\right) \quad \ldots\ldots (16a),$$

worin zu setzen ist $r = 1-h$. Die Entwicklung für Φ_1 wird erhalten durch Multiplikation der Potenzreihe für $\frac{1}{\sqrt{b(r)}}$ (Formel 34) mit der Entwicklung von $f(\sqrt{b(1-h)}\cdot g(\sqrt{b(1)}))$ nach Potenzen von h. Man setze kurz

$$\sqrt{b(1-h)} = \sqrt{b(1)} + S(h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51),$$

wo $S(h)$ eine Potenzreihe in h ist, deren sämtliche Koeffizienten (nach (34)) von der Form sind

$$\frac{\lambda}{3} H_n(\varrho^2) = \sqrt{b(1)}\, H_n(\varrho^2),$$

wo $H_n(\varrho^2)$ ein Polynom in ϱ^2 vom Grade n mit numerischen Koeffizienten ist. Es ist

$$f(\sqrt{b(1-h)}\cdot g(\sqrt{b(1)})) = f(\sqrt{b(1)}\cdot g(\sqrt{b(1)}) + g(\sqrt{b(1)})\cdot S(h)).$$

Sei f in einer Umgebung der Stelle $\sqrt{b(1)}\cdot g(\sqrt{b(1)})$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar:

$$\left.\begin{aligned} f(\sqrt{b(1-h)}\cdot g(\sqrt{b(1)})) &= \sqrt{b(1)} + \sum_n \frac{X^n}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n} \\ x = \sqrt{b(1)}\cdot g(\sqrt{b(1)}), &\qquad X = S(h)\cdot g(\sqrt{b(1)}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (52).$$

Diese Reihe ordne man um nach Potenzen von h. Nach (5a) ist

$$\sqrt{b(1)}\cdot g(\sqrt{b(1)}) = f^*(\sqrt{b(1)}),$$

wo f^* die Umkehrfunktion von f ist. Wir setzen der Bequemlichkeit halber

$$f^*(x) \equiv F(x), \qquad \text{also} \quad f(F(x)) \equiv x.$$

Man hat also zu berechnen

$$B_n = \frac{d^n f(F(y))}{dF^n(y)} \qquad \text{mit} \qquad y = \sqrt{b(1)} = \frac{\lambda}{3}.$$

Es ist

$$\frac{df(F(y))}{dF(y)} = \left(\frac{dF(y)}{dy}\right)^{-1}.$$

[8]) Lode: Der Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 303, S. 1, Berlin 1928. Die dort angegebenen Formeln sind mit unserer Bezeichnung wiedergegeben.

Durch vollständige Induktion schließt man, daß $\frac{d^n f(F)}{d F^n}$ die Form hat:

$$B_n = \frac{d^n f(F)}{d F^n} = \left(\frac{d F(y)}{d y}\right)^{-(2n-1)} \cdot \sum c_{t_1,\ldots,t_k} \cdot F^{(t_1)}(y) \ldots F^{(t_k)}(y), \qquad F^{(t_i)}(y) \equiv \frac{d^{t_i} F(y)}{d y^{t_i}} \quad (53)$$

mit

$$t_1 + \cdots + t_k = 2n-2, \qquad (k = n-1), \qquad t_1 \ldots t_k \neq 0,$$

$c_{t_1,\ldots,t_k}$ ist eine Konstante. Die t_i durchlaufen alle Zerlegungen der Zahl $2n-2$ in genau $(n-1)$ Summanden, die nicht notwendig alle verschieden sind. Ein t_i ist also mindestens gleich 1, höchstens gleich n; dieser Höchstwert wird angenommen, wenn alle übrigen $n-2$ Summanden den Wert 1 haben.

3. Aus (52) ist ersichtlich, daß die Entwicklung von $\Phi_1(1-h)$ nach h mit dem Absolutglied 1 beginnt, da X mindestens mit der ersten Potenz von h beginnt. Man hat also

$$\Phi_1 = 1 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots.$$

Unter der sogleich zu untersuchenden Annahme, daß alle a_i mit abnehmendem μ festen endlichen Grenzwerten zustreben, folgt ebenso wie in § 3, 3., daß sich dann aus den Spannungsrandbedingungen für μc_1 und μc_2 Potenzreihen nach μ ergeben, die in erster Annäherung die Formeln

$$c_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{1-m} + \cdots, \qquad c_2 = -\frac{1}{1-m} + \cdots$$

zur Folge haben. Die c_i haben auch jetzt bei $\mu = 0$ einen Pol erster Ordnung, und $\frac{c_2}{c_1}$ strebt demselben Grenzwert $-\frac{2}{3}$ zu wie früher, also hat auch ϱ einen endlichen Grenzwert für $\mu \to 0$, und es wird nach (51)

$$\sqrt{b(r)} = \frac{1}{1-m} S_1(h), \qquad S_1(0) \neq 0,$$

wo die Koeffizienten der Potenzreihe $S_1(h)$ mit abnehmendem μ endlichen Grenzwerten zustreben. Wegen

$$X = \frac{1}{1-m}(S_1(h) - S_1(0)) \frac{\sqrt{b(1)} \cdot g(\sqrt{b(1)})}{\sqrt{b(1)}} = \frac{1}{1-m} S_2(h) \cdot \frac{F(\sqrt{b(1)})}{\sqrt{b(1)}} = \text{const}\, S_3(h) \cdot F(\sqrt{b(1)}),$$

wo $S_3(h)$ eine mit h^1 beginnende Potenzreihe ist, deren Koeffizienten für $\mu \to 0$ endlichen Grenzwerten zustreben, ist a_i nach (16a) eine endliche Summe von Gliedern der Form (abgesehen von einem Faktor, der für $\mu \to 0$ einem endlichen Grenzwert zustrebt)

$$\frac{F^n(y)}{y} \cdot B_n \qquad \text{mit} \qquad y = \sqrt{b(1)},$$

so daß dem Grenzübergang $\mu \to 0$ der limes $y \to \infty$ entspricht. Wir untersuchen jetzt, unter welchen Voraussetzungen für $F(y)$ der obige Ausdruck für jedes n bei $y \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt.

Für $n = 1$ ist $B_1 = (F'(y))^{-1}$, wenn wir im folgenden kurz Differentiation nach y mit einem Akzent bezeichnen. Wir haben also zu verlangen, daß a)

$$\lim_{y \to \infty} \frac{F(y)}{y F'(y)} = \omega$$

existiert. Bei linearem f ist $\omega = 1$. Ist mit

$$\xi = \sqrt{(\mathfrak{S}')^2}, \qquad \eta = \sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$$

die Verfestigungskurve

$$\eta = f(\xi),$$

so ist

$$\eta = F(\xi)$$

die durch Spiegelung von f an der Winkelhalbierenden des (ξ, η) Systems entstandene Kurve. Für f haben wir vorausgesetzt, daß f monoton wächst mit monoton fallender Tangentenrichtung, also

$$f(\xi) > 0, \qquad \frac{d f}{d \xi} > 0, \qquad \frac{d^2 f}{d \xi^2} < 0$$

für alle Werte $\xi > 0$. Also ist

$$F(\xi)>0\,,\qquad \frac{dF}{d\xi}>0\,,\qquad \frac{d^2F}{d\xi^2}>0\,,$$

und sowohl F als auch F' streben für wachsendes Argument gegen Unendlich. Ferner verlangen wir, daß b) F für hinreichend große Werte des Argumentes beliebig oft differenzierbar ist. Also muß auch f diese Eigenschaft haben.

Aus der Existenz von ω folgt unter den genannten Voraussetzungen nach bekannten Sätzen über die Bestimmung von Grenzwerten unbestimmter Formen, daß auch

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{1+y\dfrac{F''(y)}{F'(y)}}=\omega$$

ist, d. h. daß

$$\lim_{y\to\infty} y\frac{F''(y)}{F'(y)}=\omega_1$$

existiert; wir verlangen, daß c) $\omega_1\neq 0$ ist, es sei denn, daß $F''(y)$ und alle folgenden Ableitungen identisch verschwinden. Setzen wir jetzt weiterhin voraus, daß d) für jedes n bei wachsendem y auch

$$y^{n-1}F^{(n)}(y)$$

über alle Grenzen wächst, so folgt mit Hilfe vollständiger Induktion, daß für jedes natürliche $n>1$

$$\lim_{y\to\infty} y^{n-1}\frac{F^{(n)}(y)}{F''(y)}=\omega_{n-1}$$

existiert; denn differenziert man Zähler und Nenner, so folgt aus der Existenz von ω_{n-1}

$$\lim_{y\to\infty}\frac{(n-1)\,y^{n-2}F^{(n)}(y)+y^{n-1}F^{(n+1)}(y)}{F''(y)}$$

$$=\lim_{y\to\infty}(n-1)\frac{F^{(n)}(y)\cdot y^{n-1}}{F'(y)}\cdot\frac{F'(y)}{y\,F''(y)}+\lim_{y\to\infty}\frac{y^nF^{(n+1)}(y)}{F'(y)}\cdot\frac{F'(y)}{y\,F''(y)}=\omega_{n-1}\,,$$

also auch die Existenz von

$$\lim\frac{y^nF^{(n+1)}(y)}{F'(y)}\,.$$

Bei linearem f sind alle ω_i gleich Null. Jetzt ergibt sich sofort, daß

$$\lim_{y\to\infty}\cdot\frac{F^n(y)}{y}\cdot B_n$$

existiert. Es genügt, die Behauptung für jeden der endlich vielen Summanden zu beweisen, aus denen B_n nach (53) besteht. Zu dem Ende betrachte man

$$\frac{F^n(y)}{y}\cdot\frac{F^{(t_1)}(y)\dots F^{(t_k)}(y)}{F'(y)^{2n-1}}=\left(\frac{F(y)}{y\,F'(y)}\right)^n\cdot\frac{F^{(t_1)}(y)\dots F^{(t_k)}(y)\cdot y^{n-1}}{F'(y)^{n-1}}\,.$$

Der erste Faktor rechts hat für $y\to\infty$ den Grenzwert ω^n. Die Existenz des Grenzwertes des zweiten Faktors folgt aus der soeben bewiesenen Existenz der Grenzwerte ω_i: Sei

$$t_1=\dots=t_j=1\,,\qquad t_{j+1}>1,\dots t_k>1\,,\qquad 1\leq j\leq n-2\,,$$

so ist

$$\frac{F^{(t_1)}(y)\dots F^{(t_k)}(y)\cdot y^{n-1}}{F'(y)^{n-1}}=\frac{F^{(t_{j+1})}(y)\dots F^{(t_{n-1})}(y)\cdot y^{n-1}}{F'(y)^{n-j-1}}\qquad\dots\quad(54).$$

Jetzt stehen rechts im Nenner ebenso viele Faktoren $F'(y)$ wie im Zähler Faktoren $F^{(t_i)}(y)$ stehen; ferner ist

$$t_{j+1}+\dots+t_{n-1}=2(n-1)-j\,,$$

so daß der Ausdruck rechts in (54) auf die Form gebracht werden kann

$$\frac{F^{(t_{j+1})}(y)\,y^{t_{j+1}-1}}{F'(y)}\cdot\frac{F^{(t_{j+2})}y^{t_{j+2}-1}}{F'(y)}\cdots\frac{F^{(t_{n-1})}(y)\,y^{t_{n-1}-1}}{F'(y)}\,;$$

mit wachsendem y konvergiert dieses Produkt gegen

$$\omega_{t_{j+1}-1}\cdot\omega_{t_{j+2}-1}\cdots\omega_{t_{n-1}-1}.$$

Damit ist die Existenz des Grenzwertes von $\dfrac{F^n(y)}{y}B_n$ bewiesen, also auch die Existenz eines

endlichen Grenzwertes für jeden der Koeffizienten in der Entwicklung von $\Phi_1(1-h)$ nach Potenzen von h.

Dieses Resultat gilt auch noch, wenn von einem gewissen Index n ab beständig $F^{(n)}(y) \equiv 0$ ist.

Zusammenfassung.

Unter der Annahme, daß bei zeitunabhängiger plastischer Verformung der Ansatz von de St.-Venant-Mises, das R. Schmidtsche Verfestigungsgesetz und die Volumenbeständigkeit gültig ist, wird der Spannungs- und Verformungszustand eines dünnwandigen kreiszylindrischen Rohres untersucht bei Beanspruchung durch hydrostatischen Innendruck auf der ganzen Länge, kräftefreiem Außenmantel und kräftefreien Enden. Die Formeln für die Spannungen und Verformungen werden bei Zugrundelegung linearer Verfestigung explizit aufgestellt und diskutiert. Die Spannungen (aber nicht die Verformungen) erweisen sich bei linearer Verfestigung und auch bei hinreichend allgemeiner Verfestigung als in erster Näherung von dem speziellen Verlauf der Verfestigungskurve unabhängig.

Die Formeln für die Spannungsverteilung des dünnwandigen Rohres sind hergeleitet worden aus einer schubspannungsfreien und in jedem Querschnitt gleichen Spannungsverteilung eines Rohres beliebiger Wandstärke, das durch Innendruck auf der ganzen Länge plastisch verformt wird; der Außenmantel ist dabei exakt kräftefrei, die Stirnflächen sind nur im Mittel kräftefrei, indem die gesamte auf die Endfläche wirkende Normalkraft verschwindet. Der Übergang zu kleinen Wandstärken liefert aus dieser Spannungsverteilung eine solche, bei der auch die Stirnflächen praktisch kräftefrei sind. 125

Eigenschwingungen gedrückter Kreisplatten.

Von *Fr. A. Willers* in Dresden.

1. Das Hamiltonsche Prinzip. Wie die Behandlung von Gleichgewichtsproblemen der Elastizitätstheorie am übersichtlichsten wird, wenn man davon ausgeht, daß in der Gleichgewichtslage die potentielle Energie Π, d. h. hier die Differenz zwischen der Formänderungsarbeit A des ganzen Systemes und der Arbeit W der äußeren Kräfte ein Minimum wird, so geht man bei Schwingungsproblemen am besten vom Hamiltonschen Prinzip aus. Dieses sagt aus, daß von allen Bewegungen, die unter gegebenen Bedingungen möglich sind, die wirklich eintretende Bewegung das Zeitintegral

$$H = \int_0^\Theta (\Pi - T)\,dt = \int_0^\Theta (A - W - T)\,dt = -\int_0^\Theta L\,dt$$

zu einem Minimum macht. Mit T ist hier die kinetische Energie des ganzen Körpers bezeichnet[1]). Den negativen Wert des Integranden bezeichnet man als Lagrangesche Funktion L. Bei der Variation sind die abgeänderten Verschiebungen, d. h. also die konkurrenzfähigen Funktionen so zu wählen, daß sie nicht nur den vorgeschriebenen Randbedingungen genügen, sondern, daß außerdem noch zur Zeit $t=0$ und $t=\Theta$ die variierten Verschiebungen mit den wirklichen zusammenfallen, daß also für diese beiden Zeitpunkte die Variation der Verschiebungen Null ist. Durch das Nullsetzen der ersten Variation des Hamiltonschen Integrales erhält man nicht nur die Differentialgleichung des Problems, sondern auch sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen. Es ergibt sich so eine Ableitung, die wesentlich einheitlicher und übersichtlicher ist als andere[2]).

2. Die Größen A, W und T für den unendlich langen Plattenstreifen. Zunächst soll am Problem der Eigenschwingungen eines in seiner Ebene gedrückten, unendlich langen Plattenstreifens konstanter Breite gezeigt werden, was alles in die drei Größen A, W und T eingehen kann. Wir denken uns aus dem unendlich langen Streifen der konstanten Breite l und der Dicke h ein Stück der Länge 1 herausgeschnitten und legen die x-Achse in irgendeinem Querschnitt in die Mittelebene der Platte; die z-Achse stehe an dem einen Rande senkrecht zu dieser Ebene. Bezeichnet man nun die Verschiebungen der Punkte der Mittelebene in Richtung der z-Achse mit $w(x,t)$, so ist, wenn man die üblichen Vernachlässigungen macht, die beim Ausbeulen aufgespeicherte Formänderungsarbeit pro Flächeneinheit $\frac{N}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$,

[1]) Eine Ableitung des Prinzipes findet man z. B. in dem Artikel von Trefftz im Handbuch der Physik, Bd. 6, Berlin 1928, S. 47 bis 140.

[2]) S. z. B. Puwein: Die Verminderung der Knicklast eines Stabes durch Querschwingungen. Bauingenieur Bd. 20 (1939), S. 14 bis 18. Es handelt sich dort eigentlich um kein Knickproblem, sondern um eine Änderung der Eigenfrequenz des Stabes durch die Einwirkung von Längskräften, vgl. Bauingenieur Bd. 20 (1939), S. 415/416.

XUM

wo $N=\frac{G h^3}{6(1-\mu)}$ der Plattenfaktor ist[3]). Wirken auf den Streifen im Abstande l_i vom Rande linear parallel der Kante verteilte federnde Kräfte, sind ebenso verteilte mitschwingende Massen eingelagert, oder ändert sich die Dicke dort sprungweise, so unterteilt man den Streifen in einzelne Abschnitte, von denen der i-te von l_{i-1} bis l_i gehen mag. Die Werte h_i und N_i sollen in den einzelnen Abschnitten als konstant angenommen werden, können sich aber, wie erwähnt, von Abschnitt zu Abschnitt ändern. Die Verschiebungen im i-ten Abschnitt bezeichnen wir mit w_i. Diese w_i sind an den Stellen l_{i-1} und l_i gewissen Übergangsbedingungen unterworfen. Die gesamte Formänderungsarbeit des betrachteten Plattenstückes ist dann also

$$A=\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{N_i}{2}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)^2 d x.$$

Die Arbeit der äußeren Kräfte ist in der Hauptsache bestimmt durch die Arbeit der Druckkraft, die in der Plattenmittelebene am Rande angreift und die pro Längeneinheit die Größe P hat. Diese Arbeit ist $\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{P_i}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2 d x$. Sollten an den Übergangsstellen weitere Druckkräfte wirken, die allerdings so verteilt sein müssen, daß ihre Resultierende in die Plattenmittelebene fällt, so können die P_i in den einzelnen Abschnitten verschieden sein. Ist der Streifen an Stellen in der Entfernung l_i federnd gestützt (von einer elastischen Bettung des ganzen Balkens oder einzelner Teile des Balkens soll hier abgesehen werden), so kommt zu diesem Wert noch die Summe $-\sum_1^n \frac{\lambda_i}{2}(w_i(l_i))^2$, und wenn außerdem noch an einigen dieser Stellen eine Federung gegen Verdrehung vorhanden ist, kommt weiter noch die Summe $-\sum_1^n \frac{\varkappa_i}{2}\left(\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial x}\right)^2$ hinzu, wo λ_i und $\varkappa_i$ Federkonstanten sind. Dabei ist natürlich nur über die in Frage kommenden Stellen zu summieren. Negativ sind diese beiden Summen zu nehmen, weil ja die Federn keine Arbeit leisten, sondern es wird im Gegenteil bei der Zusammendrückung der Federn der Platte Energie entzogen. Als gesamte Arbeit der äußeren Kräfte erhält man

$$W=\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{P_i}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2 d x-\sum_1^n \frac{\lambda_i}{2}(w_i(l_i))^2-\sum_1^n \frac{\varkappa_i}{2}\left(\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial x}\right)^2.$$

Ähnlich findet man die kinetische Energie $\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2 d x$, wo m_i die Masse der Platte pro Flächeneinheit im i-ten Abschnitt ist. Dazu kommt weiter, wenn man die Querschnittsverdrehungen berücksichtigt, $\sum_1^n \frac{m_i I_i}{2 h_i}\int_{l_{i-1}}^{l_i}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t\,\partial x}\right)^2 d x$. Sind außerdem noch linienförmig verteilte Einzelmassen an den Stellen l_i eingelagert und haben diese pro Längeneinheit die Masse μ_i und gegen die Mittelebene der Platte das Trägheitsmoment J_i, so kommt zur kinetischen Energie weiter die Summe $\sum_1^n\left[\frac{\mu_i}{2}\left(\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial t}\right)^2+\frac{J_i}{2}\left(\frac{\partial^2 w_i(l_i)}{\partial t\,\partial x}\right)^2\right]$ hinzu. Die Massen $\mu_i=\frac{\pi_i}{g}$ bewirken natürlich, daß bei lotrecht stehender Platte die Druckkräfte in den einzelnen Abschnitten verschieden sind. Sieht man von dem Gewicht der Platte selbst ab, und wirken an den Übergangsstellen keine Einzelkräfte, so ist im i-ten Abschnitt $P_i=P_n+\sum_{j=i}^n \frac{\pi_j}{g}$. Die gesamte kinetische Energie ist also

$$T=\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i}\left[\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2+\frac{m_i I_i}{2 h_i}\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial t\,\partial x}\right)^2\right] d x+\sum_1^n\left[\frac{\mu_i}{2}\left(\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial t}\right)^2+\frac{J_i}{2}\left(\frac{\partial^2 w_i(l_i)}{\partial t\,\partial x}\right)^2\right].$$

[3]) z. B. Willers: Forsch. Ing.-Wes. Bd. IV (1939), S. 227 bis 234.

Die Zusammenfassung der Ausdrücke für W, T und A gibt die Lagrangesche Funktion L und das Zeitintegral über $-L$ wird für die wirklich eintretende Bewegung zum Minimum[4]). Von H hat man dann die erste Variation zu bilden. In dieser formt man die einzelnen Integrale durch unvollständige Integration um und erhält so einen Ausdruck, aus dem man die Differentialgleichung und die Rand- und Übergangsbedingungen ablesen kann[5]).

3. Die Differentialgleichung für die Grundschwingungen der gedrückten Kreisplatte. Durchgeführt wird im folgenden das Problem der gedrückten Kreisplatte vom Radius R, die in ihrem Mittelpunkt federnd gestützt ist. Bei diesem Problem hat man natürlich Polarkoordinaten r, ϑ zu benutzen. Vernachlässigt man die kinetische Energie infolge der Querschnittsverdrehungen, so lautet für den Fall, daß die Platte überall die gleiche Dicke hat[6]), das Hamiltonsche Integral[7])

$$H=\int_0^{\Theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left\{\frac{N}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \vartheta}\right)^2\right\}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{2}{r^3}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \vartheta}-\frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2\right)\right]-\frac{P}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2\right]-\frac{m}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}r\,dr\,d\vartheta\,dt+\int_0^{\Theta}\frac{\lambda}{2}(w(0))^2\,dt\Bigg\}\quad(1).$$

Bei den Plattenschwingungen hat man Gruppen von Schwingungsformen, die sich nach der Anzahl der Durchmesser unterscheiden, die als Knotenlinien auftreten. In jeder dieser Gruppen hat man außer der gleichen Anzahl von Durchmessern konzentrische Kreise als Knotenlinien[8]). Nun sieht man ohne weiteres, daß bei elastischer Federung des Plattenmittelpunktes diese Federung nur die Schwingungen beeinflussen wird, die entweder überhaupt keine oder nur konzentrische Kreise als Knotenlinien haben. Bei allen Gruppen, bei denen ein oder mehrere Durchmesser in Ruhe bleiben, bleibt auch der Mittelpunkt in Ruhe, so daß die Federung bei diesen Schwingungen überhaupt nicht in Anspruch genommen wird,

---

[4]) Nicht berücksichtigt ist hier der Einfluß der Scherkräfte, den zuerst Timoschenko (Phil. Mag. Bd. 41 (1921), S. 744 bis 746), untersucht hat. Vgl. auch z. B. Bylund: Schwingungen glatter Stäbe und Wellen. Ingeniörs Vetenskaps Akademien Handlingar No. 148, Stockholm 1938. Bezeichnet man den Winkel, um den sich das Streifenelement verzerrt, mit γ, so kann man, wie man leicht überlegt, diesen Einfluß in folgender Weise berücksichtigen. Im Ausdruck für die Formänderungsarbeit hat man statt $\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}$ zu setzen $\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}-\frac{\partial \gamma_i}{\partial x}$, ferner hat man hier noch die Arbeit der Scherkräfte hinzuzufügen $\sum_1^n \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{G\cdot h_i}{2}\gamma_i^2\,dx$, wo G der Schubmodul ist. Im Ausdruck für die Arbeit der äußeren Kräfte ist $\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial x}$ durch $\frac{\partial w_i(l_i)}{\partial x}-\gamma_i$ zu ersetzen, und im Ausdruck für die kinetische Energie tritt an die Stelle von $\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\,\partial t}$ jetzt $\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}$. Variiert man dann sowohl w_i wie γ_i, so erhält man durch Nullsetzen sowohl des Faktors von δw_i, wie des von $\delta\gamma_i$ in den Doppelintegralen zwei Gleichungen. Differentiiert man die zweite nach x und subtrahiert sie von der ersten, ergibt sich als Beziehung zwischen w_i und γ_i

$$m_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial t}-G\cdot h_i\frac{\partial \gamma_i}{\partial x}+P\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}=0.$$

Benutzt man diese Beziehung zur Elimination von γ_i aus der ersten Gleichung, erhält man die der von Timoschenko gegebenen Gleichung entsprechende. Außerdem ergeben sich hier natürlich auch sofort die Rand- und Übergangsbedingungen.

[5]) Puwein gibt in der oben erwähnten Arbeit unter anderem für den einseitig eingespannten Stab der Länge l, der am freien Ende durch eine mitschwingende Masse m beansprucht ist, nur eine genäherte Gleichung zur Berechnung der Eigenfrequenzen. Aus obigem Ansatz gewinnt man ohne weiteres die exakte Gleichung. Vernachlässigt man, wie Puwein es tut, die kinetische Energie der Drehbewegung der Querschnitte, nimmt für α und β die in Gleichung (5) gegebenen Werte und führt ferner die Abkürzungen $k^2=\sqrt{\frac{m}{N}}\,\omega\,l^2$, $\beta\,l=z$, also $\alpha\,l=\frac{k^2}{z}$ ein, so lautet die exakte Frequenzgleichung

$$2k^2+\left(\frac{k^8}{z^4}+z^4\right)\cos z\,\mathfrak{Cof}\frac{k^2}{z}+\left(\frac{k^4}{z^2}-z^2\right)\sin z\,\mathfrak{Sin}\frac{k^2}{z}$$
$$-\frac{N}{m\,g\,l^3}\left(\frac{k^8}{z^4}-z^4\right)\left(z\,\mathfrak{Sin}\frac{k^2}{z}\cos z-\frac{k^2}{z}\,\mathfrak{Cof}\frac{k^2}{z}\sin z\right)=0,$$

aus der man in jedem besonderen Falle durch Eingabeln zusammengehörende Werte von k und z berechnen kann oder zu der man ein für allemal eine Netztafel entwirft, indem man $\frac{N}{m\,g\,l^3}$ bzw. den reziproken Wert als dritte Veränderliche einführt.

[6]) Wenn sich die Dicke in konzentrischen Kreisen sprungweise ändert, ist die Summe der über die einzelnen Kreisringe gebildeten Integrale zu nehmen.

[7]) Vgl. z. B. Willers: Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 206 bis 210.

[8]) S. a. R. C. Colwell, J. K. Stewart u. A. W. Friend. Phil. Mag. Reihe 7. Bd. 27, 1939, S. 123 bis 128.

XUM

daß man hier also den gleichen Schwingungszustand erhält wie in dem Fall, wo keine elastische Bindung vorhanden ist. Da diese Fälle, wenigstens für die nichtgedrückte Platte, eingehend behandelt sind[9]), beschränke ich mich hier hauptsächlich auf den ersten Fall. Da dann die Bewegung von ϑ unabhängig ist, lautet das Hamiltonsche Integral

$$\frac{1}{2N\pi}H=\int_0^\Theta\int_0^R\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)-\frac{P}{N}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{m}{N}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}r\,dr\,dt+\frac{\lambda}{4N\pi}\int_0^\Theta w^2(0)\,dt,$$

und daraus findet man die erste Variation

$$0=\frac{1}{2N\pi}\delta H=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\Theta\int_0^R\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)dr\,dt-(1-\mu)\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial\delta w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\,dr\,dt\\ \displaystyle-(1-\mu)\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2\delta w}{\partial r^2}\,dr\,dt-\frac{P}{N}\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}r\,dr\,dt\\ \displaystyle-\frac{m}{N}\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}r\,dr\,dt+\frac{\lambda}{2N\pi}\int_0^\Theta w(0)\,\delta w(0)\,dt\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\int_0^\Theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)r\frac{\partial\delta w}{\partial r}\Big|_0^R dt & \displaystyle-\int_0^\Theta r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}\delta w\Big|_0^R dt & \displaystyle+\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial w}{\partial r}\right\}\right)\right]\delta w\,dr\,dt\\ & \displaystyle-(1-\mu)\int_0^\Theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\delta w\Big|_0^R dt & \displaystyle+(1-\mu)\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\delta w\,dr\,dt\\ \displaystyle-(1-\mu)\int_0^\Theta\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}\Big|_0^R dt & \displaystyle+(1-\mu)\int_0^\Theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\delta w\Big|_0^R dt & \displaystyle-(1-\mu)\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\delta w\,dr\,dt\\ & \displaystyle-\frac{P}{N}\int_0^\Theta r\frac{\partial w}{\partial r}\delta w\Big|_0^R dt & \displaystyle+\frac{P}{N}\int_0^\Theta\int_0^R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\delta w\,dr\,dt\\ & \displaystyle-\frac{m}{N}\int_0^R r\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_0^\Theta dr & \displaystyle+\frac{m}{N}\int_0^\Theta\int_0^R r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,dr\,dt\\ & \displaystyle+\frac{\lambda}{2N\pi}\int_0^\Theta w(0)\,\delta w(0)\,dt & \end{array}\right\}\quad(2).$$

Aus den Doppelintegralen in (2) ergibt sich, da δw beliebig sein kann, der Faktor von δw also Null sein muß, die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\}\right]+\frac{P}{N}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{m}{N}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

und wenn man darin $w(r,t)=v(r)\sin\omega t$ setzt:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\right\}\right]+\frac{P}{N}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)-\frac{m}{N}\omega^2 v=0\quad\ldots\ldots\quad(3).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$v(r)=AJ_0(\beta r)+BY_0(\beta r)+CI_0(\alpha r)+DK_0(\alpha r)\quad\ldots\ldots\quad(4),$$

wo

[9]) S. z. B. die Arbeiten von Poisson, Kirchhoff, Rayleigh und für die eingespannte Kreisplatte insbesondere Meyer zur Capellen, Ann. Phys. Bd. 33 (1888), S. 661 ff.

$$\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\frac{P}{N}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{P}{N}\right)^2+\frac{m\omega^2}{N}}},\qquad \alpha=\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{P}{N}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{P}{N}\right)^2+\frac{m\omega^2}{N}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist. Mit J_p und Y_p sind hier die Besselsche bzw. Neumannsche Zylinderfunktion p-ter Ordnung bezeichnet, die bekanntlich der Gleichung

$$x^2 Z_p''+x Z_p'+(x^2-p^2) Z_p=0$$

genügen. Die beiden weiterhin gebrauchten Neumannschen Funktionen nullter und erster Ordnung lassen sich durch die beiden Reihen

$$\left.\begin{aligned} Y_0(x)&=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_0(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{j}\right)\\ Y_1(x)&=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_1(x)-\frac{2}{\pi x}\\ &\quad-\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{j}+\frac{1}{2(j+1)}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

darstellen, wo mit $\gamma=0{,}57721566\ldots$ die Eulersche Konstante bezeichnet ist. $I_p(x)$ und $K_p(x)$ genügen der Gleichung

$$x^2 Z_p''+x Z_p'-(x^2+p^2) Z_p=0,$$

und zwar ist

$$I_p(x)=e^{-\frac{1}{2}p\pi i} J_p(i x) \text{ und } K_p(x)=\frac{\pi}{2} i e^{\frac{1}{2}p\pi i} H_p^{(1)}(i x),$$

wo $H_p^{(1)}(x)$ die erste Hankelsche Zylinderfunktion mit dem Index p ist. Insbesondere ist

$$\left.\begin{aligned} K_0(x)&=-\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)I_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(j!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{j}\right)\\ K_1(x)&=\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)I_1(x)+\frac{1}{x}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\,(j+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{j}+\frac{1}{2(j+1)}\right)\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Tabellen für die ersten drei Funktionen und für $\frac{2}{\pi}K_0(x)$ und $\frac{2}{\pi}K_1(x)$ finden sich in den Funktionstafeln von Jahnke-Emde[10]) auf vier Stellen hinter dem Komma, während man außer den ersten drei Funktionen $K_0(x)$ und $K_1(x)$ auf eine größere Anzahl von Stellen im sechsten Band der von der British Association herausgegebenen Tafeln[11]) findet.

Beim Einsetzen der Lösungen in die Randbedingungen werden noch die folgenden Beziehungen gebraucht: Für die Besselschen und die Neumannschen Funktionen gilt

$$\frac{d Z_0(\beta r)}{d r}=-\beta Z_1(\beta r);\qquad \frac{d(r Z_1(\beta r))}{d r}=\beta r Z_0(\beta r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8);$$

ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{d I_0(\alpha r)}{d r}&=\alpha I_1(\alpha r);\qquad \frac{d(r I_1(\alpha r))}{d r}=\alpha r I_0(\alpha x)\\ \frac{d K_0(\alpha r)}{d r}&=-\alpha K_1(\alpha r);\qquad \frac{d(r K_1(\alpha r))}{d r}=-\alpha r K_0(\alpha r)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

4. Randbedingungen und Frequenzgleichung. Da es sich um eine eingespannte Platte handelt, sind am Rande $r=R$

$$v(R)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .

Ferner muß im Mittelpunkte $r=0$ die Tangentialebene der Platte aus Symmetriegründen stets parallel der Plattenebene in der Ruhelage sein, d. h. es muß

$$\left(\frac{d\,v\,(r)}{d\,r}\right)_{r=0}=0 \quad . \quad . \quad .

$$\begin{vmatrix} J_0(\beta R) & Y_0(\beta R)+\frac{2}{\pi}K_0(\alpha R) & I_0(\alpha R) \\ -\beta R J_1(\beta R) & -\beta R Y_1(\beta R)-\frac{2}{\pi}\alpha R K_1(\alpha R) & \alpha R I_1(\alpha R) \\ \varrho & -\frac{2}{\pi}\alpha^2 R^2-\frac{2}{\pi}\beta^2 R^2+\frac{2}{\pi}\varrho\ln\frac{\beta}{\alpha} & \varrho \end{vmatrix} = 0 .$$

Führt man noch die Abkürzungen

$$\beta R = z, \qquad \alpha R = \frac{k^2}{z}, \qquad \text{wo} \quad k^2 = \sqrt{\frac{m}{N}}\,\omega R^2 \quad \text{ist},$$

ein, so kann man diese Gleichung in die Form bringen:

$$+\frac{2}{\pi}\left(z^2+\frac{k^4}{z^2}\right)\begin{vmatrix} J_0(z) & I_0\left(\frac{k^2}{z}\right) \\ -z J_1(z) & \frac{k^2}{z} I_1\left(\frac{k^2}{z}\right) \end{vmatrix} = \varrho \begin{vmatrix} J_0(z) & Y_0(z)+\frac{2}{\pi}K_0\left(\frac{k^2}{z}\right) & I_0\left(\frac{k^2}{z}\right) \\ +z J_1(z) & z Y_1(z)+\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{z}K_1\left(\frac{k^2}{z}\right) & -\frac{k^2}{z} I_1\left(\frac{k^2}{z}\right) \\ 1 & \frac{2}{\pi}\ln\frac{z^2}{k^2} & 1 \end{vmatrix} \qquad (10).$$

Hier hat man in den zweiten Summanden der zweiten Spalte die in den Tafeln von Jahnke-Emde[10]) aufgezeichneten Funktionen, da ja

$$\frac{2}{\pi}K_0\left(\frac{k^2}{z}\right) = i\,H_0^{(1)}\left(i\frac{k^2}{z}\right) \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi}K_1\left(\frac{k^2}{z}\right) = -H_1^{(1)}\left(i\frac{k^2}{z}\right) \quad \text{ist.}$$

Aus (10) berechnet man zu gegebenen Werten z und k das zugehörige ϱ. Beachtet man noch, daß

$$z^2 = \beta^2 R^2 = \frac{P R^2}{2 N} + \sqrt{\left(\frac{P R^2}{2 N}\right)^2 + k^4}$$

ist, und setzt $\sigma = \frac{P R^2}{N}$, so erhält man

$$\sigma^2 = z^2 - \frac{k^4}{z^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

und damit zusammengehörige Werte von $\sigma(k, z)$ das dem Druck P in der Plattenebene, von k das der Wurzel aus der Eigenfrequenz ω, und von $\varrho(k, z)$, das der Federwirkung proportional ist. Mit den so berechneten Werten ist die Netztafel (Bild 1) für die kleinste Eigenfrequenz der von ϑ unabhängigen Schwingungen entworfen. Dabei sind nur positive Werte von P berücksichtigt worden. Man könnte die Zeichnung natürlich auch über die Achse $\sigma = 0$, auf der die Frequenzen der Schwingungen der nicht gedrückten Platte aufgezeichnet sind, hinaus fortsetzen und so die Eigenschwingungen der Platte unter Zug erhalten.

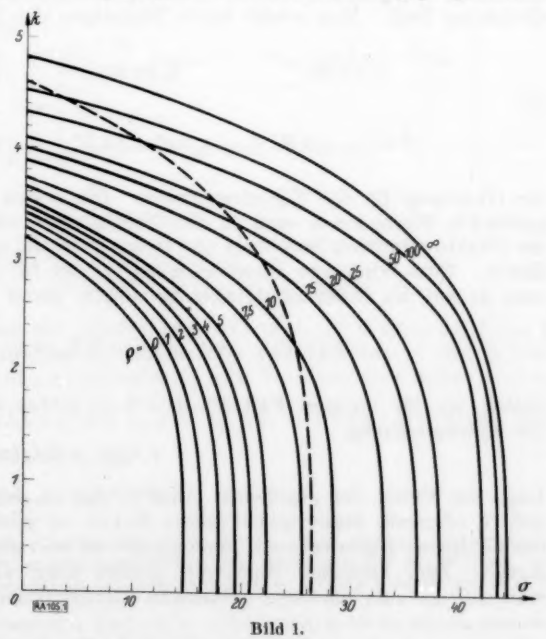


Bild 1.

Einer besonderen Überlegung bedarf noch der Fall $k = 0$, d. h. der Fall, daß die Eigenfrequenz Null wird, daß also die Rückstellkräfte verschwinden. Die Platte schwingt dann nicht mehr, sondern knickt aus. Man kann zur Behandlung dieses Falles entweder von der Lösung der Differentialgleichung für $k = 0$[7]) ausgehen, oder man kann auch in obiger Gleichung den Grenzübergang ausführen. Die Determinante der linken Seite ergibt dann $\frac{2}{\pi} z^3 J_1(z)$. In der Determinante der rechten Seite wird zu-

nächst die dritte Zeile von der ersten subtrahiert. In der letzten Spalte steht dann nach dem Grenzübergang $k \to 0$ in jeder der ersten beiden Zeilen eine Null, in der dritten eine Eins. Das zweite Glied der ersten Reihe erfordert einige Umformungen, wobei man die oben angegebene Reihe für K_0 benutzen muß. Schließlich ergibt sich

$$\frac{2}{\pi} z^3 J_1(z) = \varrho \begin{vmatrix} J_0(z) - 1 & Y_0(z) - \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right) \\ z J_1(z) & z Y_1(z) + \frac{2}{\pi} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (12).$$

5. Schwingungen mit Durchmessern als Knotenlinien. Es kann sein, daß die aus dem Nomogramm entnommene Eigenfrequenz, ähnlich ist es beim Plattenstreifen, nicht die niedrigste ist. Diese kann vielmehr einer Schwingung mit einem Durchmesser als Knotenlinie entsprechen. Sie ergibt sich hier allerdings nicht aus der Frequenzgleichung der vorigen Nummer, sondern für jede der verschiedenen Gruppen von Schwingungen muß eine neue Frequenzgleichung abgeleitet werden. Ebenso wie oben kann man auch in diesen Fällen Differentialgleichung, Rand- und Übergangsbedingungen aus dem in (1) gegebenen allgemeinen Hamiltonschen Integral erhalten. Setzt man gleich $w = v(r, \vartheta) \sin \omega t$, so lautet die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{P}{N}\right) v - \frac{m\omega^2}{N} = 0 \quad \ldots\ldots (13).$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$v(r, \vartheta) = [A J_p(\beta r) + B Y_p(\beta r) + C I_p(\alpha r) + D K_p(\alpha r)] \sin(p\vartheta + \varphi) \quad \ldots (14).$$

Da es sich jetzt nur um Schwingungen handelt, für die in der Plattenmitte $v = 0$ sein muß, kann man von vornherein $B = D = 0$ setzen und das Integral

$$v(r, \vartheta) = [A J_p(\beta r) + C I_p(\alpha r)] \sin(p\vartheta + \varphi)$$

benutzen, man braucht sich dann weiter nicht um den Punkt $r = 0$ zu kümmern und hat nur die Randbedingungen für $r = R$, wo für alle Werte von ϑ $v(R) = 0$ und $\left(\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$, also

$$A J_p(\beta R) + C I_p(\beta R) = 0, \qquad -A\frac{p}{R} J_p(\beta R) - C\frac{p}{R} I_p(\beta R) + A\beta J_{p-1}(\beta R) + C I_{p-1}(\alpha R) = 0$$

sein muß. Wegen der ersten Gleichung ist die Summe der beiden ersten Glieder der zweiten Gleichung Null. Man erhält durch Nullsetzen der Determinante

$$\begin{vmatrix} J_p(\beta R) & I_p(\alpha R) \\ \beta R J_{p-1}(\beta R) & \alpha R I_{p-1}(\alpha R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_p(z) & I_p\left(\frac{k^2}{z}\right) \\ z J_{p-1}(z) & \frac{k^2}{z} I_{p-1}\left(\frac{k^2}{z}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (15)$$

die Gleichung für die Eigenfrequenzen. Die ersten Wurzeln dieser Gleichung für die nichtgedrückte Platte $z = k$ sind in den Tafeln von Jahnke-Emde[12]) gegeben. Für $p = 1$ sind die Punkte allgemein berechnet und in die Netztafel eingetragen. So erhält man die gestrichelte Kurve. Eine besondere Überlegung ist wieder für $\omega = 0$ erforderlich. Am einfachsten geht man da auf die Differentialgleichung zurück, deren Integral jetzt

$$v(r, \vartheta) = (A J_p(\beta r)) + B Y_p(\beta R) + \left(r^p + \frac{D}{r^p}\right) \sin(p\vartheta + \varphi) \quad \ldots\ldots (16)$$

lautet, wo für unseren Fall $B = D = 0$ zu setzen ist. Aus ihm ergibt sich dann für $p = 1$ die Knickgleichung

$$z J_0(z) - 2 J_1(z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Liegt der Punkt der gegebenen ϱ-Kurve, der zu dem ebenfalls vorgeschriebenen Wert von σ gehört, oberhalb dieser gestrichelten Kurve, so gibt nicht das zu diesem Punkt gehörende k die niedrigste Eigenfrequenz, sondern der zu dem gleichen σ gehörende Punkt der gestrichelten Kurve. Zum kleinsten Eigenwert gehört dann also eine Eigenfunktion mit Knotenlinie, während die zum nächsten gehörende Eigenfunktion keine Knotenlinie hat. 105

[12]) Jahnke-Emde: Funktionstafeln, 3. Aufl. Leipzig 1938, S. 234.

Über eine Klasse von zweidimensionalen Verteilungen.

Von *Maria-Pia Geppert* in Bad Nauheim.

(Aus der statistischen Abteilung des William G. Kerckhoff-Herzforschungs-Instituts, Bad Nauheim.)

1. Bei Untersuchungen zweidimensionaler Verteilungen kann es unter Umständen, sei es aus sachlichen Gründen, sei es aus methodischen, geraten erscheinen, die Verteilung nicht mehr auf die ursprünglich verwendeten Zufallsvariablen, sondern auf ein anderes, geeigneteres Paar von Zufallsvariablen zu beziehen. Einerseits ist in der Anwendung ein solcher Schritt nur dann sinnvoll, wenn die neuen Zufallsvariablen praktische oder anschauliche Bedeutung haben; andererseits muß man wissen, wie durch eine solche Transformation der Charakter der Korrelation beeinflußt wird, um Transformationen zu vermeiden, die etwa die Zusammenhangsverhältnisse entstellen oder verdunkeln würden, und umgekehrt aus den Eigenschaften der neuen Verteilung nur berechtigte Schlüsse auf die ursprüngliche zu ziehen.

Die Hauptergebnisse, zu denen mich die Untersuchung der Wirkung einer linearen Transformation auf die Verteilung bisher geführt hat[1][2], sollen im folgenden unter einem umfassenderen Gesichtspunkt kurz zusammengefaßt werden.

2. Wir betrachten eine kontinuierliche zweidimensionale Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y) \geqq 0$ nach den Zufallsvariablen x, y, die wir als cartesische Koordinaten deuten. Da bekanntlich die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des Korrelationskoeffizienten einer Verteilung wesentlich davon abhängt[3], ob die Regressionslinien geradlinig sind oder nicht, ist vor allem die Frage wichtig, wie sich die Geradlinigkeit der Regressionslinien gegenüber den linearen Transformationen verhält.

Wir beschränken uns zunächst auf die Untergruppe der Bewegungen in der xy-Ebene. Definitionsgemäß werden die Momente

$$\mu_{g|h} = \int\int f(x, y) \cdot (x - m_{1|0})^g (y - m_{0|1})^h \, dx \, dy$$

und damit alle auf ihnen aufgebauten Charakteristiken der Verteilung durch eine Verschiebung der Koordinatenachsen nicht verändert. Es bleibt also die Wirkung einer beliebigen Drehung

$$\bar{x} = x \cos \omega + y \sin \omega, \qquad \bar{y} = -x \sin \omega + y \cos \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zu untersuchen[4]. Die transformierte Verteilungsfunktion lautet:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x} \cos \omega - \bar{y} \sin \omega, \bar{x} \sin \omega + \bar{y} \cos \omega), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und ihre Momente ergeben sich aus den ursprünglichen nach der Transformationsformel

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mu}_{g|h} = &\sum_{k=0}^{h} (-1)^{h-k} \mu_{g+h-k\,k} \cdot \sum_{\nu=0}^{\min(g,k)} (-1)^\nu \binom{g}{\nu} \binom{h}{k-\nu} \cos^{g+k-2\nu} \omega \cdot \sin^{h-k+2\nu} \omega \\ &+ \sum_{k=0}^{g-1} \mu_{k\,g+h-k} \sum_{\nu=0}^{\min(h,k)} (-1)^\nu \binom{h}{\nu} \binom{g}{k-\nu} \cos^{h+k-2\nu} \omega \cdot \sin^{g-k+2\nu} \omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3).$$

Das Quadrat des Korrelationskoeffizienten wird demnach zu

$$\bar{r}^2 = \frac{[(\mu_{2|0} - \mu_{0|2}) \sin 2\omega - 2\mu_{1|1} \cdot \cos 2\omega]^2}{[(\mu_{2|0} - \mu_{0|2}) \sin 2\omega - 2\mu_{1|1} \cdot \cos 2\omega]^2 + 4 \cdot (\mu_{2|0}\mu_{0|2} - \mu_{1|1}^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Man erkennt daraus (durch Transformation der quadratischen Form $\mu_{2|0}\xi^2 + 2\mu_{1|1}\xi\eta + \mu_{0|2}\eta^2$ auf die Hauptachsen), daß, abgesehen von dem Trivialfalle, in dem zwischen x und y eine lineare funktionale Beziehung besteht, stets mindestens ein Drehungswinkel $\omega = \omega_0$ existiert[5], derart, daß nach Drehung um $\omega_0 \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$ im neuen System der Korrelationskoeffizient verschwindet; ist

$$\mu_{1|1}^2 + (\mu_{2|0} - \mu_{0|2})^2 > 0,$$

---

[1] M. P. Geppert: Una proprietà caratteristica della distribuzione di Bravais. Giorn. Istit. Ital. Att. 7 (1936).

[2] M. P. Geppert: Su una classe di distribuzioni in due variabili casuali. Giorn. Istit. Ital. Att. 10 (1939).

[3] A. Tschuprow: Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Leipzig u. Berlin 1925, S. 49, 55.

[4] loc. cit. [1].

[5] Vgl. G. Castelnuovo: Calcolo delle probabilità, 2. Aufl., Bd. 2. Bologna 1928, S. 219 bis 225, wo, allerdings ganz anderem Zusammenhange, ähnliche Gedankengänge und Rechnungen auftreten.

XUM

so gibt es nur einen solchen Wert ω_0; ist dagegen

$$\mu_{1|1} = \mu_{2|0} - \mu_{0|2} = 0\,,$$

so verschwindet $\bar{r}$ identisch für jedes ω.

Soll im ursprünglichen System die Regression von y in bezug auf x bzw. die Regression von x in bezug auf y linear sein, so muß für alle ganzen $n \geqq 1$[6])

$$\mu_{2|0}\,\mu_{n|1} - \mu_{1|1}\,\mu_{n+1|0} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5')$$

bzw.

$$\mu_{0|2}\,\mu_{1|n} - \mu_{1|1}\,\mu_{0|n+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5'')$$

gelten. Die linken Seiten der entsprechenden Bedingungen für die $\bar{\mu}_{g|h}$ drücken sich unter Benutzung von (3) nach langwierigen Rechnungen durch die $\mu_{g|h}$ wie folgt aus:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_{2|0}\,\bar{\mu}_{n|1} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{n+1|0} = -\sum_{k=0}^{n+1} \cos^{n-k+1}\omega \cdot \sin^k \omega \cdot \Big\{ \binom{n}{k-1}\,\mu_{0|2}\,\mu_{n-k+2|k-1} \\ + \binom{n}{k-1}\frac{n-2k+1}{k}\,\mu_{1|1}\,\mu_{n-k+1|k} - \binom{n}{k}\,\mu_{2|0}\,\mu_{n-k|k+1}\Big\}\end{aligned}\right\} \quad (6')$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_{0|2}\,\bar{\mu}_{1|n} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{0|n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \cos^k \omega \cdot \sin^{n-k+1}\omega \cdot \Big\{ \binom{n}{k-1}\,\mu_{0|2}\,\mu_{n-k+2|k-1} \\ + \binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-2k+1}{k}\,\mu_{1|1}\,\mu_{n-k+1|k} - \binom{n}{k}\,\mu_{2|0}\,\mu_{n-k|k+1}\Big\}\end{aligned}\right\} \quad (6'').$$

Damit die Linearität der Regression von $\bar{y}$ in bezug auf $\bar{x}$ bzw. von $\bar{x}$ in bezug auf $\bar{y}$ nach jeder beliebigen Drehung gewahrt bleibe, also der Ausdruck (6′) bzw. (6″) in ω identisch verschwinde, müssen die Koeffizienten der einzelnen Produkte $\cos^{n-k+1}\omega \cdot \sin^k \omega$ gleich Null sein. Das führt unter Verwendung der Parameter

$$r_{g|h} = \frac{\mu_{g|h}}{\mu_{2|0}^{\frac{g}{2}} \cdot \mu_{0|2}^{\frac{h}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

in beiden Fällen zur selben Bedingung:

$$k \cdot r_{n-k+2|k-1} + (n-2k+1)\cdot r \cdot r_{n-k+1|k} - (n-k+1)\, r_{n-k|k+1} = 0\,, \qquad 0 \leq k \leq n+1 \quad (8).$$

Damit also gegenüber jeder Drehung des Koordinatensystems die Linearität der Regression erhalten bleibe, müssen die auf das ursprüngliche System bezogenen $r_{g|h}$ das Gleichungssystem (8) erfüllen.

Die erste und die letzte Gleichung des Systems (8) sind nichts weiter als die entsprechenden Linearitätsbedingungen im ursprünglichen Koordinatensystem. Ferner ersieht man aus (8) — geometrisch eine Selbstverständlichkeit —, daß die Linearität der Regression von $\bar{y}$ in bezug auf $\bar{x}$ bei Rotationen dann und nur dann erhalten bleibt, wenn auch die Linearität der Regression von $\bar{x}$ in bezug auf $\bar{y}$ erhalten bleibt.

Um das Gleichungssystem (8) bequem lösen zu können, benutzen wir die oben erwähnte Tatsache, daß, außer in dem trivialen Falle einer linearen funktionalen Beziehung zwischen x und y, von dem wir hier ein für allemal absehen, stets eine Lage des cartesischen Koordinatensystems existiert, in welcher der entsprechende Korrelationskoeffizient verschwindet. Ohne Einschränkung können wir daher von dieser Lage als ursprünglicher ausgehen und $r = 0$ setzen. Das System (8) vereinfacht sich dadurch zu:

$$k \cdot r_{n-k+2|k-1} - (n-k+1)\cdot r_{n-k|k+1} = 0\,, \qquad 0 \leq k \leq n+1 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und führt zur Lösung:

$$\left.\begin{aligned} r_{g|h} = r_{h|g}\,, \qquad r_{2g+1|2h} = r_{2g+1|2h+1} = r_{2g|2h+1} = 0 \\ r_{2\lambda+2k|2\lambda-2k} = \frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\ldots\ldots(2\lambda+2k-1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots\ldots(2\lambda-2k+1)} \cdot r_{2\lambda|2\lambda} = r_{2\lambda-2k|2\lambda+2k} \\ r_{2\lambda+2+2k|2\lambda-2k} = \frac{(2\lambda+3)(2\lambda+5)\ldots\ldots(2\lambda+2k+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots\ldots(2\lambda-2k+1)} \cdot r_{2\lambda|2\lambda+2} = r_{2\lambda-2k|2\lambda+2+2k}\end{aligned}\right\} \quad (10).$$

[6]) A. Tschuprow, loc. cit. [3]), S. 48.

Um aus diesen Beziehungen zwischen den Momenten $\mu_{\varrho/h}$ Schlüsse auf die Verteilungsfunktion $f(x, y)$ selbst zu ziehen[7]), bedienen wir uns der Laplaceschen Adjungierten[8]):

$$\Phi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \mu_{\nu/n-\nu} \cdot \binom{n}{\nu} u^{\nu} v^{n-\nu} = \int\int f(x, y) \cdot e^{i(ux+vy)}\, dx\, dy .$$

Wegen (10) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Phi(u, v) = 1 &- \frac{1}{2!}(\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2) + \frac{3}{4!}\, r_{2/2} \cdot (\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2)^2 \\ &- \frac{5}{6!} \cdot r_{2/4} \cdot (\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2)^3 \pm \cdots \\ &+ \frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\ldots(4\lambda-1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots 1} \cdot \frac{r_{2\lambda/2\lambda}}{(4\lambda)!} \cdot (\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2)^{2\lambda} \\ &- \frac{(2\lambda+3)(2\lambda+5)\ldots(4\lambda+1)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\ldots 1} \cdot \frac{r_{2\lambda/2\lambda+2}}{(4\lambda+2)!} \cdot (\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2)^{2\lambda+1} \pm \cdots \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Diejenigen Verteilungen, die beliebigen Drehungen gegenüber lineare Regression bewahren, haben also bei geeigneter Wahl des ursprünglichen Koordinatensystems eine Laplacesche Erzeugende der Form:

$$\Phi(u, v) = \Phi(\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2) \quad (12).$$

Aus dieser läßt sich[9]) die Verteilungsfunktion mittels der Fourierschen Integralformel

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int\int \Phi(u, v) \cdot e^{-i(ux+vy)}\, du\, dv \quad (13)$$

bestimmen. Durch Einsetzen von (12) und Transformation der Integrationsvariablen

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int\int \Phi(\mu_{2/0}\, u^2 + \mu_{0/2}\, v^2) \cdot e^{-i(ux+vy)}\, du\, dv \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \cdot \sqrt{\mu_{2/0}\, \mu_{0/2}}} \cdot \int\int \Phi(U^2 + V^2) \cdot e^{-i\left(U \cdot \frac{x}{\sqrt{\mu_{2/0}}} + V \cdot \frac{y}{\sqrt{\mu_{0/2}}}\right)} dU\, dV \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

werden wir zur Berechnung des Integrals

$$\int\int \Phi(u^2 + v^2) \cdot e^{-i(u\xi + v\eta)}\, du\, dv = J(\xi, \eta) \quad (15)$$

geführt.

Zu dem Zweck entwickeln wir dasselbe nach Potenzen von ξ und η. Durch Differentiation unter dem Integralzeichen, die wir — unter Ausschaltung aller diese Voraussetzung nicht erfüllenden Verteilungen — als erlaubt annehmen, und Einführung von Polarkoordinaten erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+l} J(\xi, \eta)}{\partial \xi^k\, \partial \eta^l}\Big|_{\xi=\eta=0} &= (-i)^{k+l} \cdot \int\int \Phi(u^2 + v^2)\, u^k\, v^l\, du\, dv \\ &= (-i)^{k+l} \cdot \int_0^{\infty} \varrho^{k+l+1} \Phi(\varrho^2)\, d\varrho \int_0^{2\pi} \cos^k \tau \cdot \sin^l \tau\, d\tau \end{aligned}$$

und mithin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^{2k+l+1} J(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2k+1}\, \partial \eta^l}\Big|_{\xi=\eta=0} &= \frac{\partial^{2k+l+1} J(\xi, \eta)}{\partial \xi^l\, \partial \eta^{2k+1}}\Big|_{\xi=\eta=0} = 0 , \\ \frac{\partial^{2k+2l} J(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2k}\, \partial \eta^{2l}}\Big|_{\xi=\eta=0} &= (-1)^{k+l} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2l-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k+2l)} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \varrho^{2(k+l)+1} \Phi(\varrho^2)\, d\varrho \\ &= C_{k+l} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2k-1) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2l-1) . \end{aligned}\right\} \quad (16).$$

[7]) loc. cit. [2]).

[8]) Bezüglich der Konvergenzbedingungen sei verwiesen auf G. Castelnuovo, loc. cit. [5]), S. 189 bis 190.

[9]) Vgl. G. Castelnuovo, loc. cit. [5]), S. 190 bis 191, wo hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Umkehrung (13) angegeben sind.

XUM

Einsetzen von (16) in die Reihenentwicklung von (15) ergibt nach einigen Umrechnungen

$$J(\xi,\eta)=J(0,0)+\frac{C_1}{2}\cdot(\xi^2+\eta^2)+\frac{C_2}{2^2\cdot 2!}\cdot(\xi^2+\eta^2)^2+\cdots+\frac{C_n}{2^n\cdot n!}\cdot(\xi^2+\eta^2)^n+\cdots \quad . \quad . \quad (17)$$

und daher wegen (14)

$$f(x,y)=f\left(\frac{x^2}{\mu_{2|0}}+\frac{y^2}{\mu_{0|2}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Durch Ausführung einer beliebigen Rotation befreien wir uns nachträglich von der Einschränkung $r=0$; das Argument von (18) geht durch eine solche in eine allgemeinere quadratische Form

$$\frac{x^2}{\mu_{2|0}}+\frac{y^2}{\mu_{0|2}}=a\,\bar{x}^2+2\,b\,\bar{x}\,\bar{y}+c\,\bar{y}^2, \qquad a\cdot c>0$$

über, und wir können unter den oben erwähnten Einschränkungen folgendes Ergebnis aussprechen:

Die Verteilungen vom Typ

$$f(x,y)=f(a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2), \qquad a\cdot c>0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

sind die einzigen in zwei Variablen, die jeder beliebigen Drehung des Koordinatensystems gegenüber die Linearität der Regression bewahren.

Daß auch umgekehrt alle Verteilungen vom Typ (19) lineare Regression aufweisen, zeigt folgende einfache Rechnung[10]:

$$m_{1|1}(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2)\,y\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2)\,dy}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(c\,u^2+\frac{a\,c-b^2}{c}\,x^2\right)\cdot\left(u-\frac{b}{c}\,x\right)du}{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(c\,u^2+\frac{a\,c-b^2}{c}\cdot x^2\right)du}$$

$$=-\frac{b}{c}\,x+\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(c\,u^2+\frac{a\,c-b^2}{c}\cdot x^2\right)u\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(c\,u^2+\frac{a\,c-b^2}{c}\cdot x^2\right)du}=-\frac{b}{c}\,x\,.$$

Da durch irgendeine Drehung das Argument von (19) stets wieder in eine quadratische Form übergeht, ist die Linearität der Regression damit auch für jede beliebige Lage des Koordinatensystems nachgewiesen.

3. Als Nebenresultat ergibt sich hieraus ohne weiteres eine charakteristische Eigenschaft der Normalverteilung:

Die Normalverteilung ist die einzige zweidimensionale Verteilung, die einerseits eine Achsenlage zuläßt, bei welcher die entsprechenden Zufallsvariablen voneinander stochastisch unabhängig sind, und die andererseits in jeder Lage des cartesischen Systems lineare Regression aufweist.

Ein völlig elementarer Beweis[11] dieser Tatsache ergibt sich direkt aus (10), wenn man die Unabhängigkeitsbedingungen[12]

$$r_{g|h}=r_{g|0}\cdot r_{0|h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

hinzunimmt.

4. Wir erörtern nun dieselbe Frage für andere lineare Transformationen der Zufallsvariablen. Die einfachsten linearen Substitutionen

$$\bar{x}=A\cdot x, \quad \bar{y}=B\cdot y, \qquad A\cdot B\neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

beeinflussen die Zusammenhangsverhältnisse überhaupt nicht, da die transformierten Momente

$$\bar{\mu}_{g|h}=A^g\,B^h\cdot\mu_{g|h}$$

---

[10] loc. cit. [1]).

[11] loc. cit. [1]).

[12] A. Tschuprow, loc. cit. [2]), S. 46.

lauten; der Korrelationskoeffizient bleibt unverändert und die Bedingungen für lineare Regression multiplizieren sich mit nicht verschwindenden Konstanten:

$$\bar{\mu}_{2|0}\,\bar{\mu}_{n|1} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{n+1|0} = A^{n+2}\,B\cdot(\mu_{2|0}\,\mu_{n|1} - \mu_{1|1}\,\mu_{n+1|0}),$$
$$\bar{\mu}_{0|2}\,\bar{\mu}_{1|n} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{0|n+1} = A\cdot B^{n+2}\cdot(\mu_{0|2}\,\mu_{1|n} - \mu_{1|1}\,\mu_{0|n+1}).$$

Um die Gesamtgruppe der linearen Substitutionen zu erfassen, genügt es, noch die Transformationen

$$\bar{x} = x - y\cdot\operatorname{cotg}\gamma, \qquad \bar{y} = \frac{y}{\sin\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

mit der Umkehrung

$$x = \bar{x} + \bar{y}\cdot\cos\gamma, \qquad y = \bar{y}\cdot\sin\gamma$$

heranzuziehen, die sich geometrisch als Übergang vom rechtwinkligen $x\,y$-System zum schiefwinkligen $\bar{x}\,\bar{y}$-System mit dem Achsenwinkel γ deuten lassen. Die transformierte Verteilungsfunktion lautet:

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y}\cdot\cos\gamma, \bar{y}\sin\gamma)\cdot\sin\gamma,$$

die Transformationsformel der Momente:

$$\bar{\mu}_{g|h} = \frac{1}{\sin^h\gamma}\cdot\sum_{k=0}^{g}(-1)^k\cdot\binom{g}{k}\operatorname{cotg}^k\gamma\cdot\mu_{g-k|h+k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23);$$

für den Korrelationskoeffizienten gilt:

$$\bar{r}^2 = \frac{(\mu_{1|1} - \mu_{0|2}\operatorname{cotg}\gamma)^2}{(\mu_{1|1} - \mu_{0|2}\operatorname{cotg}\gamma)^2 + \mu_{2|0}\,\mu_{0|2} - \mu_{1|1}^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

er verschwindet demnach[13]) für

$$\operatorname{cotg}\gamma_0 = \frac{\mu_{1|1}}{\mu_{0|2}}.$$

Die linken Seiten der Linearitätsbedingungen für die Regression von $\bar{y}$ in bezug auf $\bar{x}$ bzw. von $\bar{x}$ in bezug auf $\bar{y}$ ergeben sich nach einigen Rechnungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_{2|0}\,\bar{\mu}_{n|1} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{n+1|0} &= \frac{1}{\sin\gamma}\cdot\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}\operatorname{cotg}^k\gamma\\ \cdot\left\{\binom{n}{k-1}\mu_{0|2}\,\mu^{n-k+2|k-1} + \binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-2k+1}{k}\,\mu_{1|1}\,\mu_{n-k+1|k} - \binom{n}{k}\,\mu_{2|0}\,\mu_{n-k|k+1}\right\}&\end{aligned}\right\} \quad (25')$$

bzw.

$$\bar{\mu}_{0|2}\,\bar{\mu}_{1|n} - \bar{\mu}_{1|1}\,\bar{\mu}_{0|n+1} = \frac{1}{\sin^{n+2}\gamma}\cdot[\mu_{0|2}\,\mu_{1|n} - \mu_{1|1}\,\mu_{0|n+1}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25'')$$

und führen damit wieder auf dasselbe Bedingungssystem (8). Die in bezug auf Drehungen ausgesprochenen Ergebnisse gelten also ganz analog für Substitutionen der Form (22).

5. Nun lassen sich andererseits alle beliebigen nicht singulären Lineartransformationen

$$\bar{x} = A\,x + B\,y + C, \qquad \bar{y} = D\,x + E\,y + F, \qquad \Delta = A\,E - B\,D \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

auf Verschiebungen und Drehungen (also Bewegungen in der $x\,y$-Ebene), Substitutionen der Form (21) und solche der Form (22) zurückführen. Wir sehen also, daß die Verteilungsfunktionen vom Typ

$$f(x,y) = f(a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2), \qquad a\cdot c > 0$$

die einzigen in zwei Variablen sind, die jeder beliebigen nicht singulären Lineartransformation gegenüber die Linearität der Regression wahren.

Daß umgekehrt auch tatsächlich die Verteilungen vom Typ (19) den linearen Transformationen gegenüber die lineare Regression aufrechterhalten, leuchtet unmittelbar ein, da durch eine lineare Transformation das Argument von (19) stets wieder in eine quadratische Form übergeführt wird.

Selbstverständlich läßt sich obiges Ergebnis auch direkt durch Untersuchung der Auswirkung der allgemeinen Transformation (26) herleiten. Wir haben bewußt diesen umständlicheren Weg vorgezogen, weil die in 2. und 4. bewiesenen Sätze doch genauere Aussagen über die Verteilungen (19) enthalten als der letzte allgemeinere Satz. 126

[13]) Vgl. O. Steiner: Der mittlere Fehler und seine graphische Darstellung. Arch. f. math. Wirtsch. u. Sozialforschg. Bd. 3 (1937), S. 127.

Die Projektion bewegter Bilder auf gewölbte Schirmflächen.

Von *Ulrich Graf* in Danzig.

Einleitung. Bei neuzeitlichen Bühnenanlagen werden die Hintergrundkulissen mit Hilfe einer Projektionseinrichtung auf den sogenannten Rundhorizont geworfen. Wegen der Wölbung dieses Rundhorizontes muß ein Bühnenbild, das vom Zuschauer perspektiv richtig gesehen werden soll, auf der Projektionsplatte verzerrt aufgezeichnet werden[1]). Dabei wird der zentralperspektiv richtige Eindruck nur für einen einzigen ausgezeichneten Zuschauerplatz erzielt, jedoch macht sich die Verzerrung auf den anderen Plätzen im allgemeinen wenig störend bemerkbar.

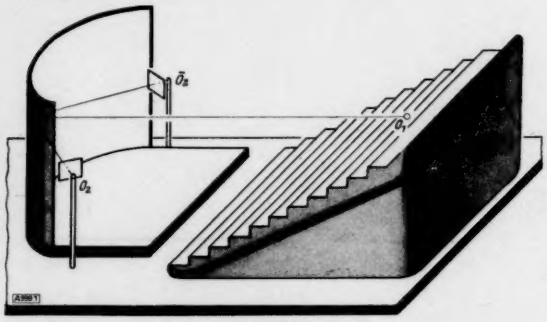


Bild 1.

Bild 1 zeigt einen zylindrischen Rundhorizont, auf den von zwei in den beiden Seitenkulissen gelegenen Beleuchtungskanzeln O_2 und $\bar{O}_2$ aus projiziert wird. Dabei muß dafür gesorgt werden, daß die beiden projizierten Bilder auf dem Rundhorizont richtig und ohne Überdeckung aneinanderpassen. Die Seitengebiete des Rundhorizonts sind durch Bühnenkulissen gegenüber dem Zuschauerraum verdeckt und somit von diesem aus nicht mehr sichtbar. Der ausgezeichnete Zuschauerplatz liegt in O_1.

Wird die Projektionsplatte bewegt, d. h. in ihrem Rahmen vor der Lichtquelle verschoben, so beobachtet der Zuschauer ein Wandern des Projektionsbildes auf dem Rundhorizont. Dabei ändert sich die Größe und die Gestalt dieses Schirmbildes. So ist es z. B. möglich, dem Zuschauer eine ziehende Wolke vorzutäuschen, die bei ihrem Wandern über den Bühnenhimmel zugleich ihre Gestalt verändert. Die Veränderung hängt im wesentlichen von der Form des Rundhorizontes und von der Stellung des Projektionsgerätes zu ihm ab; durch geeignete Wahl dieser beiden Faktoren können mit einer einfachen Bewegung eines Kulissen-Diapositives überraschende bühnentechnische Illusionswirkungen erzielt werden. Im folgenden werden solche Projektionen bewegter Bilder auf gewölbte Schirmflächen untersucht. Dabei ist die Schirmfläche als Fläche zweiter Ordnung gewählt, da sich die Rundhorizonte der Praxis sehr gut durch Teile von Flächen zweiter Ordnung annähern lassen.

Der Projektionsvorgang. In homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ habe die Schirmfläche zweiter Ordnung F^2 (Bild 2) die Gleichung

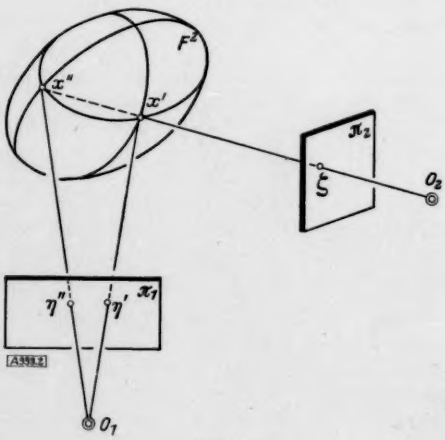


Bild 2.

$$F^2_{xx} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2 \cdot x_\lambda^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Das Zuschauerauge O_1 sei durch

$$O_1 (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und das Projektionszentrum O_2 durch

$$O_2 (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

festgelegt. Die Bildebene[2]) π_1 für das zentralperspektive Zuschauerbild von O_1 aus habe die Gleichung

$$\pi_1 \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda \cdot x_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und die Ebene π_2 des Projektions-Diapositives die Gleichung

$$\pi_2 \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} b_\lambda \cdot x_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

[1]) U. Graf: Zur mathematischen Behandlung der Kulissenprojektion, Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 237 und Entzerrte Rundhorizont-Projektion, Z. VDI Bd. 82 (1938), S. 1429. Vgl. Fr. Kranich: Die Bühnentechnik der Gegenwart. Verlag R. Oldenbourg, München. 2. Bd.

[2]) Das Zuschauerbild wird durch eine Zentralperspektive (Photographie) erfaßt; die perspektiven Verzerrungen gegenüber einer „Sehkugel" können außer Betracht gelassen werden, da das Bühnenbild in unmittelbare Nähe des Hauptpunktes fällt.

Ist $\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3$ ein Punkt der Diapositivplatte π_2, so ist sein Projektionsstrahl vom Zentrum O_2 aus durch

$$\varrho\, x_i = \beta_i\, \zeta_0 + \nu\,(\beta_0\, \zeta_i - \beta_i\, \zeta_0), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mit ν als Parameter gegeben. Das Schnittpunktepaar x', x'' dieses Strahles mit der Schirmfläche (1) ist festgelegt durch die beiden Werte ν, die sich als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\zeta_0^{\,2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^{\,2}\, \beta_\lambda^{\,2} + 2\,\nu \cdot \zeta_0 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^{\,2}\, \beta_\lambda (\beta_0\, \zeta_\lambda - \beta_\lambda\, \zeta_0) + \nu^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^{\,2}\, (\beta_0\, \zeta_\lambda - \beta_\lambda\, \zeta_0)^2 = 0$$

ergeben[3]). Diesen beiden Punkten x', x'' entsprechen bei dem Sehvorgang von O_1 aus zwei Punkte η', η'' in der Bildebene π_1, die durch

$$\varrho\, \eta_i = a_i\, x_0 + \mu\,(a_0\, x_i - a_i\, x_0), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

bestimmt sind. Dabei ist μ durch die Bedingung festgelegt, daß η' und η'' in der Bildebene π_1 liegen.

Zu jedem Punkt der Diapositivplatte ergibt sich auf diesem Wege das Bildpunktepaar in der Bildebene π_1 für den Zuschauer O_1. Je nach der Lage von O_1 im Zuschauerraum wird sich ein anderes Sehbild einer Figur ergeben, die von dem festen Zentrum O_2 aus auf die Schirmfläche projiziert wird. Auf diese Weise lassen sich die Unterschiede und Verzerrungen der Sehbilder von verschiedenen Zuschauerplätzen aus bestimmen.

Durch den Sehvorgang von O_1 aus wird der Bildebene π_1 eine nichteuklidische Maßbestimmung aufgeprägt (vgl. Anm. 1), die grundlegend ist für die analytische und konstruktive Erfassung der Gestaltsänderung bewegter Bilder. Der Tangentialkegel von O_1 an die Schirmfläche F^2 schneidet die Bildebene π_1 in einem Kegelschnitt f^2, der zum Fundamentalgebilde der nichteuklidischen Metrik in π_1 erklärt wird (Bild 3). Der Tangentialkegel vom Projektionszentrum O_2 an die Schirmfläche F^2 berührt diese längs eines Kegelschnittes, dessen Projektion von O_1 aus in π_1 einen Kegelschnitt o^2 erzeugt, der f^2 doppelpunktig berührt, d. h. ein Kreis im Sinne der in π_1 geltenden Metrik ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises o^2 ist der Kernpunkt K, der sich als Durchstoßpunkt von π_1 mit der Verbindungsgeraden (Kernstrahl) $O_1\, O_2$ des Sehzentrums O_1 mit dem Projektionszentrum O_2 ergibt.

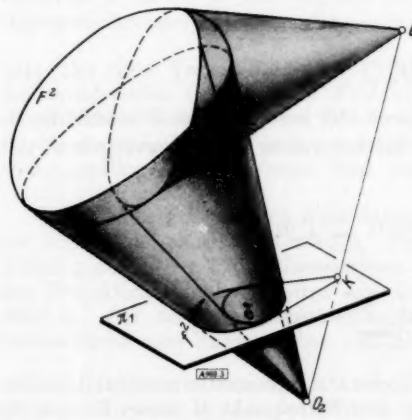


Bild 3.

Das Fundamentalgebilde f^2 und der Orthogonalkreis o^2 in der Bildebene π_1 legen nun diejenigen Kurven fest, in denen der Zuschauer die geraden Linien auf der Diapositivplatte π_2 bei ihrer Projektion auf die Schirmfläche sieht. Jede solche Gerade liegt nämlich in einer Projektionsebene durch O_2, und der Kegelschnitt, in dem diese Ebene die Schirmfläche F^2 schneidet, geht bei der Projektion vom Sehzentrum O_1 aus in einen Kegelschnitt in π_1 über, der nach bekannten Gesetzen der nichteuklidischen Geometrie ein Kreis im Sinne der π_1 aufgeprägten Metrik ist und überdies den Orthogonalkreis o^2 im Sinne dieser Metrik senkrecht schneidet.

Die Gleichung des vom Sehzentrum $O_1\,(a_\lambda)$ ausgehenden Berührungskegels an die Schirmfläche F^2 lautet:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^{\,2}\, a_\lambda^{\,2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^{\,2}\, x_\lambda^{\,2} - \Big(\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^{\,2}\, a_\lambda\, x_\lambda\Big)^2 = 0\,.$$

In bezug auf ein neues homogenes Koordinatensystem $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$, dessen Ursprung die Kegelspitze $O_1\,(a_\lambda)$ ist und das demnach durch

$$\varrho\, y_0 = a_0\, x_0\,, \qquad \varrho\, y_i = a_0\, x_i - a_i\, x_0\,; \qquad i = 1, 2, 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

[3]) Bei den Rundhorizonten der Praxis kommt nur einer der Werte in Betracht, da nur auf einen Teil einer Fläche zweiter Ordnung projiziert wird.

festgelegt ist, hat der Berührungs-Fundamentalkegel die Gleichung

$$\{f^2_{yy}\} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, y_\lambda^2 - \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, y_\lambda\Big)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Jede Ebene

$$\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda\, x_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

schneidet die Schirmfläche F^2 in einem Kegelschnitt. Bei dem Sehvorgang von O_1 aus legt dieser Kegelschnitt einen Sehkegel fest, dessen Gleichung sich aus (1), (7), (8) und (10) zu

$$\left.\begin{aligned} \{k^2_{uu}\} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, y_\lambda\Big)^2 - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda\, a_\lambda \\ + \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, y_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda\, a_\lambda\Big)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ergibt. Ist insbesondere die Ebene (10) die Polarebene des Projektionszentrums O_2 bezüglich der Schirmfläche F^2, d. h. ist $u_\lambda = \beta_\lambda \cdot c_\lambda^2$, so erzeugt der Sehkegel (11) als Schnitt mit der Bildebene π_1 den Orthogonalkreis o^2, der für die Anordnung der gesuchten Bahnkurven maßgebend ist. Die Gleichung dieses Orthogonal-Sehkegels lautet demnach:

$$\left.\begin{aligned} \{o^2\} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, \beta_\lambda\, y_\lambda\Big)^2 - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, \beta_\lambda\, y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, \beta_\lambda \\ + \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, y_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, \beta_\lambda\Big)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Kegel (11) lassen sich in der Form

$$\big(\{f^2_{ym}\}\big)^2 = \mathfrak{Cof}^2\, \varkappa\, \varrho \cdot \{f^2_{yy}\} \cdot \{f^2_{mm}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

darstellen, wobei m_λ die Koordinaten des Poles der Ebene (10) bezüglich der Schirmfläche (1) bedeuten und die Symbole $\{f^2_{ym}\}$ und $\{f^2_{mm}\}$ aus (9) in der bekannten Weise hervorgehen: mit $u_\lambda = m_\lambda \cdot c_\lambda^2$ ist

$$\{f^2_{mm}\} \equiv \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 - \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, a_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, y_\lambda,$$

$$\{f^2_{mm}\} \equiv \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{u_\lambda^2}{c_\lambda^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 - \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, a_\lambda\Big)^2.$$

Jeder Kegel (13) schneidet die Bildebene π_1 in einem Kreise k^2 der genannten nichteuklidischen Maßbestimmung. Der Mittelpunkt M dieses Kreises ist der Schnittpunkt von π_1 mit der Geraden, die das Sehzentrum O_1 mit dem Pol (m_λ) verbindet (Bild 4); der Halbmesser ϱ des Kreises ergibt sich nach (13) zu

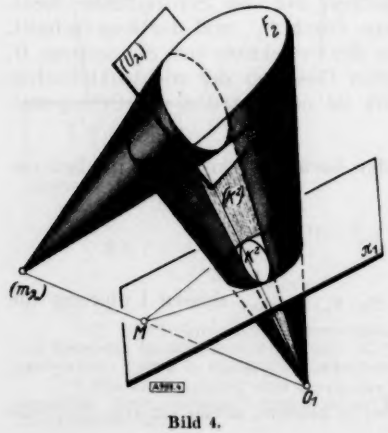


Bild 4.

$$\varrho = \frac{1}{\varkappa} \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{u_\lambda^2}{c_\lambda^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2}}{\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda\, a_\lambda} \quad . \quad (14).$$

Für $u_\lambda = \beta_\lambda\, c_\lambda^2$ erhält man wie oben den Orthogonalkreis o^2 mit dem Halbmesser

$$r = \frac{1}{\varkappa} \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{\sqrt{\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, \beta_\lambda^2}}{\sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2\, a_\lambda\, \beta_\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und dem Mittelpunkt (Kernpunkt)

$$K: x_i = a_i \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda \beta_\lambda - \beta_i \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda a_\lambda, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Die Lage der Schnittebene π_1 zu dem Sehkegel (13) spielt für den Halbmesser und Mittelpunkt des ausgeschnittenen nichteuklidischen Kreises keine Rolle, und die Streckenkonstante $\varkappa$ der Maßbestimmung ist, weil es sich nur um Orthogonalitätsbeziehungen handelt, willkürlich wählbar.

Die Bahnkurven bei einer Plattenverschiebung. Alle Projektionsstrahlen, die ein Plattenpunkt bei der Verschiebung der Diapositivplatte π_2 längs seiner geradlinigen Bahn bestimmt, erfüllen eine Ebene durch das Projektionszentrum O_2. Für solche Ebenen (10) gilt die Bedingung

$$\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda \beta_\lambda = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

und da die Geraden in π_2 zum Bilde in π_1 die Orthogonalkreise von o^2 im Sinne der π_1-Metrik haben, muß (17) die Orthogonalitätsbedingung darstellen. In der Tat läßt sich (17) in der gleichwertigen Form

$$(f^2_{\beta m})^2 = \mathfrak{Cof}^2 \varkappa \varrho \cdot \mathfrak{Cof}^2 \varkappa r \cdot f^2_{\beta\beta} \cdot f^2_{m\,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

schreiben, die nach den Gesetzen der nichteuklidischen Geometrie den orthogonalen Schnitt der beiden Kreise k^2 und o^2 kennzeichnet. Ist insbesondere auch $\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda = 0$, d. h. geht die Ebene (10) noch durch das Sehzentrum O_1 und enthält somit den Kernstrahl $O_1 O_2$, so ist ihr Bildkreis k^2 in π_1 in eine doppelt zählende Gerade durch den Kernpunkt (Mittelpunkt des Orthogonalkreises) entartet. Demnach gilt:

Bei einer Verschiebung der Projektionsplatte beobachtet der Zuschauer als Bahnkurven des wandernden Schirmbildes Kreise im Sinne derjenigen nichteuklidischen Metrik, die der Bildebene durch den vom Zuschauer-Auge an die Schirmfläche zweiter Ordnung gelegten Berührungskegel als Fundamentalgebilde aufgeprägt wird. Alle diese Bahnkreise sind Orthogonalkreise eines festen, von der Lage des Projektionszentrums abhängigen Kreises.

Bei einer geradlinigen Verschiebung der Diapositivplatte π_2 bilden die Bahnkurven auf ihr eine Schar paralleler Geraden. Diese Geraden bestimmen einen Ebenenbüschel, dessen Achse $\mathfrak{g}$ durch das Projektionszentrum O_2 geht; die Ebenen des Büschels werden erfüllt von den Projektionsstrahlen zu den auf ihren geradlinigen Bahnen wandernden Plattenpunkten (Bild 5). Bei der Projektion beobachtet der Zuschauer von O_1 aus als Bahnkurven auf der Schirmfläche eine lineare Reihe von (nichteuklidischen) Kreisen, die dem linearen Kreissystem

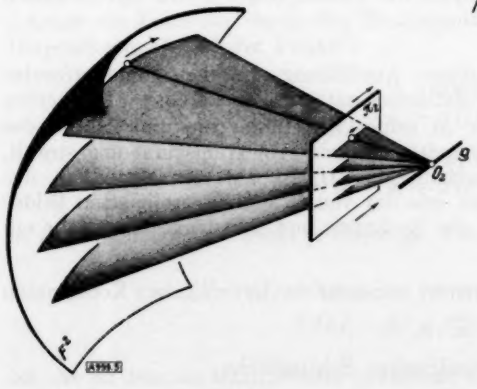


Bild 5.

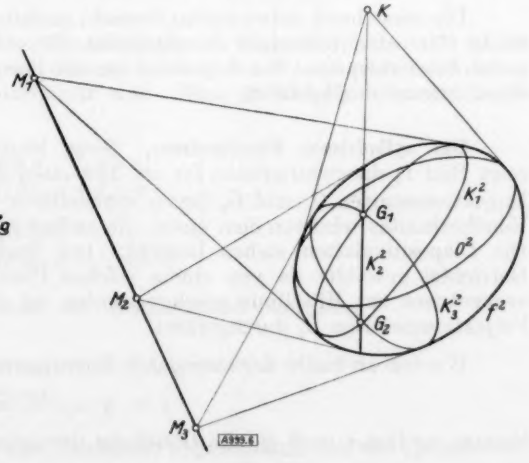


Bild 6.

mit o^2 als Orthogonalkreis angehören. Alle Kreise der linearen Reihe gehen durch zwei feste Punkte G_1 und G_2, die den Durchstoßpunkten der Achse $\mathfrak{g}$ mit der Schirmfläche F^2 entsprechen. Auf der Verbindungsgeraden $G_1 G_2$ liegt der Kernpunkt K (Mittelpunkt des Orthogonalkreises o^2). Die Mittelpunkte $M_1, M_2, M_3 \ldots$ der Kreise $k_1^2, k_2^2, k_3^2 \ldots$ liegen auf der zu $G_1 G_2$ senkrechten Geraden, die durch Projektion von O_1 aus der reziproken Polaren von $\mathfrak{g}$ bezüglich F^2 hervorgeht (Bild 6).

Der die geradlinigen Bahnkurven in π_2 projizierende Ebenenbüschel sei gegeben durch

$$\sum_{\lambda=0}^{3}(u_\lambda + \nu\, v_\lambda)\, x_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

mit ν als Parameter. Die Gleichung der zugehörigen Sehkegelmannigfaltigkeit (mit der Spitze im Sehzentrum O_1), die aus der Bildebene π_1 die lineare Kreisreihe ausschneidet, lautet dann nach (11):

$$\begin{aligned}
&\{k_{uu}^2\} + 2\nu \cdot \{k_{uv}^2\} + \nu^2 \cdot \{k_{vv}^2\} \\
&= \Big[\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda y_\lambda\Big)^2 - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 y_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda\Big)^2\Big] \\
&+ 2\nu \cdot \Big[\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} v_\lambda y_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda y_\lambda \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{3} v_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda\Big) \\
&+ \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 y_\lambda^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda\Big] \\
&+ \nu^2 \cdot \Big[\sum_{\lambda=0}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{3} v_\lambda y_\lambda\Big)^2 - 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 a_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{3} v_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{3} c_\lambda^2 y_\lambda^2 \cdot \Big(\sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda\Big)^2\Big] = 0
\end{aligned} \quad (20).$$

(In der nichteuklidischen Geometrie bilden die ∞^1 Kreise durch zwei feste Punkte G_1 und G_2 nicht mehr wie in der euklidischen Geometrie einen Büschel!) Unter den Kreisen der linearen Kreisreihe (20) ist eine (doppelt zählende) Gerade enthalten; sie trägt die beiden Grundpunkte G_1 und G_2 sowie den Kernpunkt K. Die Ebene, die dieser Geraden in dem Büschel (19) zugeordnet ist, geht durch das Sehzentrum O_1. Ihre Gleichung ergibt sich aus

$$\sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda + \nu \sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda = 0$$

und (20) zu

$$\sum_{\lambda=1}^{3} u_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} v_\lambda a_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{3} v_\lambda y_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{3} u_\lambda a_\lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Diese Ebene schneidet π_1 in der Geraden durch G_1, G_2, K.

Die vorstehend entwickelten Formeln gestatten die Berechnung der Bahnkurven bewegter Bilder für jeden beliebigen Rundhorizont, für jede Stellung des Projektionsgerätes und für jeden Zuschauerplatz. Im folgenden ist als Beispiel die Anwendung auf den zylindrischen Rundhorizont durchgeführt.

Der zylindrische Rundhorizont. Diese häufigste Ausführungsart eines Rundhorizontes zeigt Bild 1; die Schirmfläche ist ein Teil eines Zylinders mit lotrechter Achse. Die beiden Projektionszentren O_2 und $\overline{O}_2$ liegen symmetrisch zu seiner Mittellinie; die eine Hälfte des Rundhorizontes wird von dem einen, die andere von dem anderen Projektionsgerät angestrahlt. Die Diapositivplatten stehen lotrecht. Der Zuschauerplatz O_1 ist auf der Mittellinie des Horizontes gewählt; da von einem solchen Platz aus die von O_2 und $\overline{O}_2$ projizierten Bilder symmetrisch zur Mittellinie gesehen werden, ist die Rechnung und Konstruktion nur für ein Projektionszentrum O_2 durchgeführt.

Werden an Stelle der homogenen Koordinaten x_λ nunmehr die inhomogenen Koordinaten

$$1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3$$

benutzt, so lautet nach (1) die Gleichung der zylindrischen Schirmfläche:

$$F^2 \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1').$$

Das Sehzentrum O_1 habe die Koordinaten

$$O_1(0, y_1, 0) \quad \ldots \quad (2')$$

und die Bildebene π_1 die Gleichung

$$\pi_1 \equiv y - y_1 - f_1 = 0 \quad \ldots \quad (4').$$

f_1 ist die Brennweite, π_1 die Plattenebene und O_1 das Objektiv eines Photogerätes, mit dem das Schirmbild auf dem Zylinderhorizont aufgenommen wird. Das Projektionszentrum sei

$$O_2(x_2, y_2, z_2) \quad \ldots \quad (3')$$

und die Ebene des Diapositives

$$\pi_2 \equiv (x - x_2)\sin\alpha - (y - y_2)\cos\alpha + f_2 = 0 \quad \ldots \quad (5'),$$

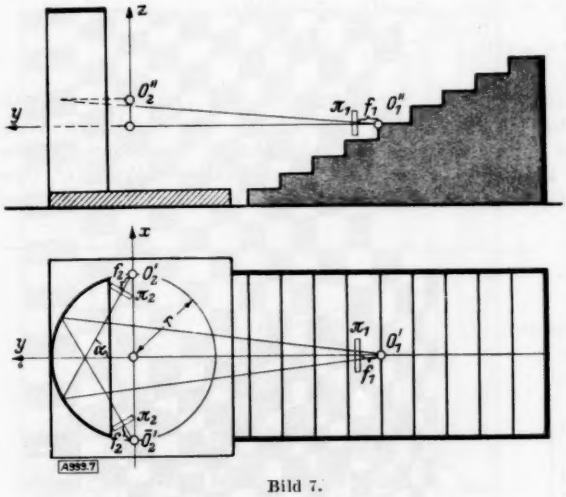


Bild 7.

worin α den (spitzen) Winkel des Haupt-Projektionsstrahles mit der Symmetrielinie des Horizontes und f_2 die Brennweite des Projektionsgerätes bedeuten (Bild 7).

Bei dieser Wahl ergibt sich nach den vorstehenden allgemeinen Formeln als Fundamentalgebilde f^2 der Bildebene π_1 das Parallelenpaar mit der Gleichung

$$x^2 = r^2\frac{(y - y_1)^2}{y_1^2 - r^2} = \frac{r^2 f_1^2}{y_1^2 - r^2} \quad \ldots \quad (9').$$

Das Fundamentalgebilde ist wie die Schirmfläche selbst ein einfach singuläres Gebilde zweiter Ordnung; es legt in π_1 daher eine dualeuklidische ($y_1^2 < r^2$) oder dual-pseudoeuklidische ($y_1^2 > r^2$) Maßbestimmung fest. Im Grenzfall $y_1^2 = r^2$ ist das Parallelenpaar in der unendlich fernen Geraden zusammengefallen.

Der Orthogonalkreis dieser Maßbestimmung in π_1 ist ebenfalls in ein (euklidisches) Parallelenpaar zerfallen. Seine Gleichung lautet nach (12):

$$\left\{x + \frac{r^2 \cdot f_1 \cdot x_2 \cdot (y_1 - y_2)}{x_2^2(y_1^2 - r^2) + (y_1 y_2 - r^2)^2}\right\}^2 = r^2 f_1^2 \cdot \frac{(x_2^2 + y_2^2 - r^2)(y_1 y_2 - r^2)^2}{\{x_2^2(y_1^2 - r^2) + (y_1 y_2 - r^2)^2\}^2} \quad \ldots \quad (12').$$

Zur Festlegung der Bahnkurven bei einer Verschiebung der Diapositivplatte wird in der Ebene π_2 ein Koordinatensystem ξ, ζ benutzt, dessen ξ-Achse die Waagerechte und dessen ζ-Achse die Lotrechte durch den Plattenmittelpunkt sind. Nach (6) und (7) entspricht jedem Diapositivpunkt ξ, ζ der Punkt

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\frac{x_2 + \mu(\xi\cos\alpha - f_2\sin\alpha)}{y_2 - y_1 + \mu(\xi\sin\alpha + f_2\cos\alpha)}, \\ z &= f_1\frac{z_2 + \mu\zeta}{y_2 - y_1 + \mu(\xi\sin\alpha + f_2\cos\alpha)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7')$$

in der Bildebene π_1, wobei μ diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned}\mu^2 \cdot \{\xi^2 + f_2^2\} + 2\mu \cdot \{&\xi(x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha) + f_2(-x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha)\} \\ &+ \{x_2^2 + y_2^2 - r^2\} = 0\end{aligned}$$

ist, die zu dem als Schirmfläche benutzten, dem Zuschauer abgewandten Teil des Zylinders (1') gehört.

XUM

Bei einer waagerechten Verschiebung der Diapositivplatte π_2 sind die Bahnkurven die Geraden $\zeta = \text{const.}$ Ihnen entsprechen in der Bildebene π_1 die geschilderten nichteuklidischen Kreise mit dem Kernpunkt K

$$x_k = \frac{f_1 x_2}{y_2 - y_1}, \qquad z_k = \frac{f_1 z_2}{y_2 - y_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16')$$

als gemeinsamem Mittelpunkt. Alle Kreise gehen durch die beiden Grundpunkte G_1 und G_2, die nach (21) bestimmt werden.

Bei gleichmäßiger Verschiebungsgeschwindigkeit der Diapositivplatte werden die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege durch die Geraden $\xi = \text{const.}$ ausgeschnitten. Ihnen entsprechen in der Bildebene π_1 die durch (7') gegebenen lotrechten Geraden $x = \text{const.}$ als ausgeartete nichteuklidische Kreisbögen.

Dem folgenden Zahlenbeispiel liegen die Werte

$$y_1 = -30\,\text{m}, \quad x_2 = 10\,\text{m}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 3\,\text{m};$$
$$r = 10\,\text{m}, \quad a = 60°, \quad f_1 = f_2 = 20\,\text{cm}$$

zugrunde. Das Projektionszentrum O_2 liegt auf der Schirmfläche selbst ($x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0$), daher ist das Orthogonalkreis-Geradenpaar in die doppelt zählende Gerade durch den Kernpunkt K ebenso wie dieser Kernpunkt mit dem einen Grundpunkt G_1 zusammengefallen. Bild 8 zeigt die Bildebene π_1 mit dem Fundamentalgebilde f^2, dem Orthogonalkreis o^2, dem Kernpunkt K und den Grundpunkten G_1, G_2. Eine Reihe von Bahnkurven $\zeta = \text{const.}$ und Geraden $\xi = \text{const.}$ ist eingezeichnet.

Bild 8 (unten).

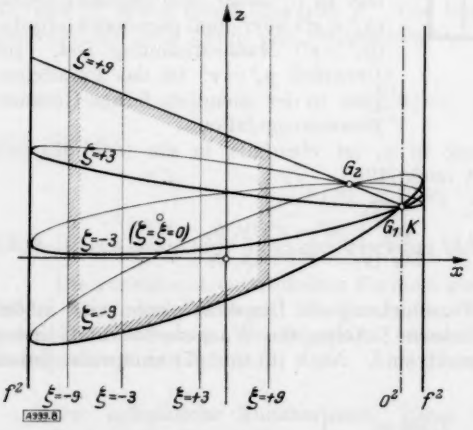
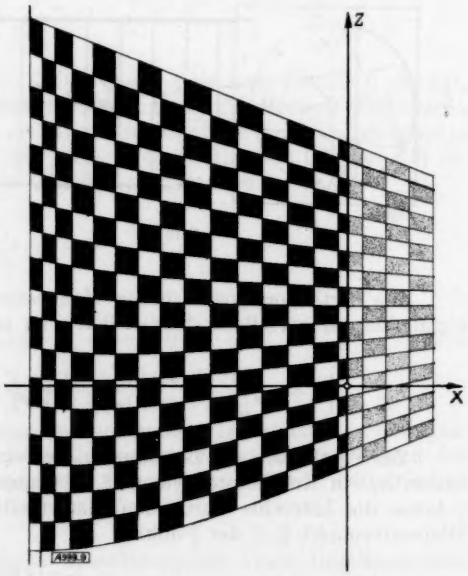


Bild 9 (rechts).



Auf der Diapositivplatte π_2 bilden die Geraden $\xi = \text{const.}$ und $\zeta = \text{const.}$ einen quadratischen Raster. Die Projektion einer solchen Rasterplatte auf die zylindrische Schirmfläche wird demnach vom Sehzentrum O_1 aus als ein Ausschnitt des Bildes 8 gesehen. Für das übliche Plattenformat von 18 cm × 18 cm zeigt Bild 9 diesen Ausschnitt, der in Bild 8 anschraffiert ist, nunmehr auf Zentimeterabstand verdichtet. Die Kurven $\zeta = \text{const.}$ sind die vom Zuschauer O_1 gesehenen Bahnkurven, die eine Figur auf der Diapositivplatte π_2 bei einer waagerechten Verschiebung beschreibt.

Da von dem Projektionszentrum O_2 aus nur die eine Hälfte des Rundhorizontes angestrahlt wird, sind in Bild 9 die jenseits der Symmetrielinie $x = 0$ liegenden Projektionsquadrate punktiert angedeutet. Der verzerrte schwarz-weiße Quadratraster ist an dieser Symmetrielinie zu spiegeln, um die von dem zweiten Projektionsgerät $\bar{O}_2$ erzeugte Bildhälfte

zu erhalten. Wird in eine Diapositivplatte mit quadratischem Raster etwa eine Wolke eingezeichnet, so läßt sich durch Übertragung in den zugehörigen verzerrten Raster Bild 9 die Gestaltsveränderung erkennen, die diese Wolke für den Zuschauer erfährt, wenn die Projektionsplatte verschoben wird.

Die Herstellung der verzerrten Rasterplatten. Der Sehvorgang von O_1 aus wird wie die Projektion von O_2 aus als Zentralprojektion auf eine Bildebene π_1 bzw. π_2 erfaßt, wobei die geometrische Verwandtschaft zwischen π_1 und π_2 durch die Schirmfläche F^2 festgelegt ist. Die Geraden in π_2 bilden sich als nichteuklidische Kreise in π_1 ab; das Fundamentalgebilde f^2 der Metrik ist durch das Sehzentrum O_1, der Orthogonalkreis o^2 aller dieser Kreise durch das Projektionszentrum O_2 bestimmt.

Vertauscht man den Projektionsvorgang mit dem Sehvorgang, d. h. fragt man nach denjenigen Kurven auf der Diapositivplatte π_2, die vom Zuschauer geradlinig gesehen werden, so erhält man durch sinngemäße Vertauschung von O_1 und O_2 ebenfalls ein Orthogonalsystem von nichteuklidischen Kreisen, die durch die vorstehenden Formeln erfaßbar sind. Einem vom Zuschauer O_1 gesehenen Quadratraster entspricht so ein verzerrtes Netz auf der Diapositivplatte, in das sich dann jedes gewünschte Bühnenbild einzeichnen läßt.

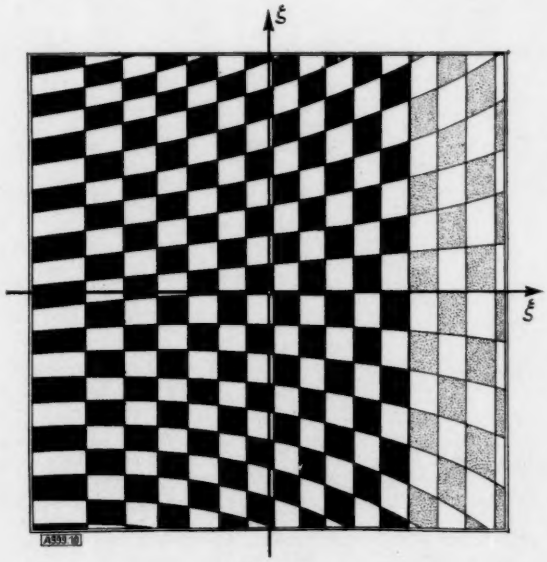


Bild 10.

Für den vorstehend behandelten Zylinderhorizont zeigt Bild 10 diesen verzerrten Raster. Die jenseits der Trennlinie liegenden, punktiert angedeuteten Maschen dürfen nicht benutzt werden, da ihre Projektionen auf diejenige Rundhorizonthälfte fallen würden, die zu dem anderen Projektionsgerät $\bar{O}_2$ gehört.

Da das Sehbild von O_1 bequem als Photographie festgehalten werden kann, lassen sich perspektiv richtig wirkende Bühnenentwürfe bei Projektionen auf Rundhorizonte folgendermaßen herstellen:

(1) Es wird eine Platte mit quadratischem Raster von O_2 projiziert und das Schirmbild vom Zuschauerplatz O_1 aus photographiert. Das Photo zeigt dann ein verzerrtes, aus Kegelschnittbögen bestehendes Netz (Bild 9).

(2) In dieses Netz wird ein quadratischer Raster eingezeichnet; die Geraden des Rasters werden in den Ausgangsraster auf der Projektionsplatte übertragen. Auf ihr ergibt sich dann das gesuchte, wiederum aus Kegelschnittbögen bestehende verzerrte Netz, dessen Projektion auf den Rundhorizont von dem Zuschauerplatz O_1 als quadratischer Raster gesehen wird (Bild 10).

(3) Die Fundamentalkegelschnitte und Kernpunkte nach der allgemeinen Verzerrungstheorie sowie die Trennlinie werden nach den vorstehenden Formeln berechnet und mit ihrer Hilfe die Netzkurven nachgeprüft und verbessert.

(4) Ein gegebener Bühnenentwurf wird mit einem quadratischen Raster überdeckt und darauf in das diesem Raster entsprechende verzerrte Netz der Projektionsplatte übertragen. So entsteht die verzerrte Diapositivplatte für die Hintergrundkulisse.

Nach diesem Doppelnetzverfahren lassen sich somit schnell und genau bei Benutzung von Photographie und Konstruktion zu jedem Rundhorizont die verzerrten Platten für perspektiv richtig wirkende Bühnenentwürfe gewinnen. 999

KLEINE MITTEILUNGEN

Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagpunkt. G. I. Taylor[1]) hat auf Grund der von ihm entwickelten statistischen Turbulenztheorie eine Formel abgeleitet, die die Abhängigkeit der Lage des Umschlagpunktes in der Grenzschicht von der Turbulenz des umgebenden Luftstroms zum Ausdruck bringt. Im besonderen stellt Taylor eine Beziehung auf zwischen der kritischen Re-Zahl einer Kugel $\left(\mathrm{Re}=\frac{U\cdot D}{\nu}\right)$ einerseits und dem Turbulenzgrad $\left(\frac{u'}{U}\right)$ und dem Turbulenzdurchmesser (L) andererseits. Danach gilt für die Lage des Umschlagpunktes (Koordinate X)

$$\mathrm{Re}\,(X)=\frac{U\,X}{\nu}=F\left[\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{X}{L}\right)^{1/5}\right],$$

und für die kritische Re-Zahl von Kugeln

$$\mathrm{Re}\,(D)=\frac{U\,D}{\nu}=G\left[\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{D}{L}\right)^{1/5}\right];$$

die Funktionen F und G selbst bleiben unbekannt und müssen experimentell bestimmt werden. Diese Formeln, die an ebenen Platten, an einem elliptischen Zylinder und an Kugeln im Versuch sehr gut bestätigt wurden, sind deshalb von besonderem Interesse, weil es sich hier um Aussagen über die Wirkungsweise der Turbulenz handelt, die auf rein theoretischer Grundlage gewonnen worden sind. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß man zur Ableitung der beiden Formeln nur wenige Grundbegriffe der statistischen Turbulenztheorie benötigt, ohne auf die ziemlich verwickelten Einzelheiten dieser Theorie eingehen zu müssen.

Die Grundannahme der Taylorschen Arbeit ist die, daß die turbulenten Schwankungen des Druckgradienten die Lage des Umschlagpunktes beeinflussen, was insofern naheliegend ist, als auch die Ablösung der laminaren Grenzschicht wesentlich vom äußeren Druckgradienten bestimmt wird. Um diese Annahme rechnerisch verfolgen zu können, wird vorausgesetzt, daß sich der betrachtete Körper in einem isotrop turbulenten Luftstrom befindet. Für die Druckschwankungen in Richtung der Grundströmung U, die den turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen (u) äquivalent sind, gilt $p\sim\frac{\varrho}{2}u^2$. Die Schwankungen des Druckgradienten sind daher $\frac{\partial p}{\partial x}\sim\varrho\,u\frac{\partial u}{\partial x}$, oder wegen der Richtungsunabhängigkeit der Schwankungsgrößen bei isotroper Turbulenz auch $\sim\varrho\,u\frac{\partial u}{\partial y}$, und der quadratische Mittelwert

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'=\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2}}\sim\sqrt{\overline{\varrho^2\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\sim\varrho\,u'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)' \quad (1),$$

wobei $u'=\sqrt{\overline{u^2}}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'=\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}$. Dieser Mittelwert $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'$ kann nun durch Energiebetrachtungen in Beziehung gesetzt werden zu u' und dem Mischungsweg l. Der allgemeine Ausdruck für die Dissipation W in einer zähen Flüssigkeit muß bei isotroper Turbulenz proportional sein zu $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'^2$. Andererseits kann man die Dissipation proportional zur Arbeitsleistung A der scheinbaren Schubspannungen setzen. (Im stationären Fall, z. B. bei der Rohrströmung, ist die Dissipation gleich der Arbeitsleistung.) Betrachtet man ein Flüssigkeitselement, dessen Abmessungen von der Größenordnung des Mischungsweges l sind, so ist die Verschiebegeschwindigkeit der scheinbaren Schubspannungen der isotropen Turbulenz, bezogen auf den Querabstand, d. h. also die Schergeschwindigkeit, von der Größenordnung $\frac{u'}{l}$; die scheinbare Schubspannung ist proportional $\varrho\,u'^2$. Demnach ist $A\sim\varrho\,u'^2\frac{u'}{l}=\varrho\frac{u'^3}{l}$. Diesen Ausdruck kann man auch anders ableiten als zeitliche Änderung der kinetischen Energie durch die Zähigkeit. Vermischt sich ein Flüssigkeitsballen, der gegenüber der Hauptströmung eine Geschwindigkeit u' besitzt, so wird die kinetische Energie pro Volumeneinheit (E) um einen Betrag $\sim\frac{1}{2}\varrho\,u'^2$ verringert. Die Zeit Δt, während der diese Energieänderung vor sich geht, ist von der Größenordnung $\frac{l}{u'}$, so daß wieder $A=\frac{\Delta E}{\Delta t}\sim\varrho\frac{u'^3}{l}$. Durch Vergleichen von A mit W ergibt sich

$$W\sim\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'^2\sim A\sim\varrho\frac{u'^3}{l},\ \text{und}\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'\sim\frac{u'}{l}\sqrt{\frac{u'\,l}{\nu}} \quad (2).$$

Für $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ ergibt sich also mit Gl. (1)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'\sim\varrho\,u'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'\sim\frac{\varrho\,u'^2}{l}\sqrt{\frac{u'\,l}{\nu}} \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Jetzt kann man die obige Annahme dimensionsanalytisch folgendermaßen formulieren: Es wird vermutet, daß die Lage des Umschlagpunktes (Koordinate X, bei der Kugel z. B. die Bogenlänge vom vorderen Staupunkt bis zum Umschlagpunkt) außer von der Strömungsgeschwindigkeit U und der kinematischen Zähigkeit ν noch von $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ abhängt. Danach muß dem Problem außer der Reynoldsschen Zahl Re (X) noch eine zweite dimensionslose Zahl zugrunde liegen, die aus den Größen X, dem Staudruck $q=\frac{\varrho}{2}U^2$ und $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ zusammengesetzt ist. Mit diesen Ausdrücken läßt sich nur die folgende Dimensionslose bilden:

$$\Lambda'=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'\frac{X}{q}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'\frac{X}{\varrho\,U^2} \quad . \ . \ . \quad (4).$$

Mit dem berechneten Ausdruck für $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ wird

$$\Lambda'=\left(\frac{u'}{U}\right)^2\frac{X}{l}\sqrt{\frac{u'\,l}{\nu}}=\sqrt{\frac{U\,X}{\nu}}\sqrt{\frac{X}{l}}\left(\frac{u'}{U}\right)^{5/2} \quad (4\,a).$$

Nach der obigen Annahme muß nun die Re-Zahl des Umschlagpunktes Re (X) eine Funktion dieser Kennzahl Λ' sein:

$$\mathrm{Re}\,(X)=\frac{U\,X}{\nu}=f\,(\Lambda')=f_1\left[\sqrt{\mathrm{Re}\,(X)}\sqrt{\frac{X}{l}}\left(\frac{u'}{U}\right)^5\right],$$

oder anders geschrieben:

$$\mathrm{Re}\,(X)=f_2\left[\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{X}{l}\right)^{1/5}\right] \quad . \ . \ . \quad (5).$$

[1]) G. I. Taylor: Proc. roy. Soc. A 156 (1936), S. 307.

$\left(\frac{u'}{U}\right)$ ist der Turbulenzgrad, der mit einem Hitzdraht gemessen werden kann. Zur experimentellen Nachprüfung dieser Formel ist noch der Mischungsweg in Beziehung zu setzen mit direkt meßbaren Größen. Der allgemeinste Ansatz ist $l \sim L$, wobei L der Durchmesser der Turbulenz ist. L kann in der Umgebung des Körpers durch Korrelationsmessungen mit Hitzdrähten ebenfalls experimentell ermittelt werden. Ist R die Korrelation der gleichzeitigen Geschwindigkeitsschwankungen an zwei um y voneinander entfernten Punkten, so ist $L = \int_0^\infty R\, dy$.

Wird die Turbulenz durch ein Gitter mit der Maschenweite M erzeugt, so kann man für größere Re-Zahlen der Turbulenz, nach Taylor etwa von $\frac{M u'}{\nu} = 60$ ab, einfach $L \sim M$ setzen. Dann lautet die Beziehung (5) schließlich

$$\mathrm{Re}\,(X) = F\left[\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{X}{M}\right)^{1/5}\right] \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Diese Beziehung wurde an ebenen Platten[2]) und an einem elliptischen Zylinder[3]) gut bestätigt.

Besondere Bedeutung hat die Taylorsche Rechnung für die kritische Re-Zahl von Kugeln, da diese gerade als ein Maß für die Turbulenz eines Windkanals betrachtet wird. $\mathrm{Re}_{krit.}$ ist definiert als diejenige Re-Zahl, bei der die Kugel den Widerstandsbeiwert $c_w = 0{,}3$ hat. Diesem c_w-Wert entspricht bei verschiedenen Kugeln und Turbulenzgraden ein bestimmter geometrisch ähnlicher Strömungszustand; folglich hat für $c_w = 0{,}3$ das Verhältnis $\frac{X}{D}$ (D Kugeldurchmesser) einen bestimmten Wert C, so daß $\mathrm{Re}_{krit.}(D) = \frac{U D}{\nu} = \frac{1}{C}\mathrm{Re}\,(X)$. Aus Gl. (6) ergibt sich damit

$$\mathrm{Re}_{krit.}(D) = G\left[\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{D}{M}\right)^{1/5}\right] \quad . \; . \; . \quad (7).$$

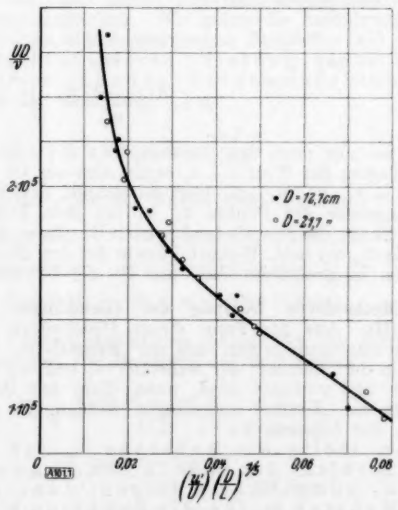


Bild 1. Abhängigkeit der kritischen Re-Zahl für Kugeln von der Turbulenz.

Bild 1 zeigt die experimentelle Bestätigung dieser Beziehung nach den Messungen von Dryden[4]); alle Meßpunkte bei verschiedenen Kugeln, Gittern und Turbulenzgraden liegen auf einer einzigen Kurve, wenn man die kritische Re-Zahl über $\left(\frac{u'}{U}\right)\left(\frac{D}{M}\right)^{1/5}$ aufträgt. Rückschließend stellt man somit die Richtigkeit der Vermutung fest, daß es tatsächlich die turbulenten Schwankungen des Druckgradienten sind, durch die die Turbulenz der äußeren Strömung einen Einfluß auf die Lage des Umschlagpunktes ausübt.

Göttingen. K. Wieghardt. 101

Über die Anlage von Fluchtlinientafeln.

Bei der Aufzeichnung von Fluchtlinientafeln (Nomogrammen) entstehen manchmal Zweifel, wie man die Skalen für die darzustellenden Funktionen und ihre Entfernungen voneinander zu wählen hat, um Schaubilder von gewünschten Abmessungen zu erhalten. Zur Behebung solcher Zweifel werden im folgenden einige einfache Beziehungen angegeben, die — so naheliegend sie auch sein mögen — bisher nicht bekannt zu sein scheinen und für die praktische Verwertung der nomographischen Methoden eine erhebliche Erleichterung bedeuten dürften.

1. Einführung der Maßstabsgrößen. Wir gehen davon aus, daß für jede der unabhängigen Funktionen, die zur Darstellung gelangen sollen, von vorneherein der Wertebereich vorgeschrieben ist, der in dem Nomogramm enthalten sein soll; und ferner sei die Größe der verfügbaren Zeichenfläche vorgegeben, die das Nomogramm bedecken soll.

Um die Bestimmungsgrößen für das gesuchte Nomogramm zu erhalten, ist es zweckmäßig, für jede der darzustellenden Veränderlichen oder Funktionen einen „Maßstab" einzuführen; und zwar geschieht dies gemäß der Gleichung

$$\text{Größe} = \text{Maßstab} \times \text{Darstellungsgröße} \quad . \; . \quad (1).$$

Die auftretenden Veränderlichen bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben x, y, z, u . . ., die Funktionen von diesen mit $f(x)$, $g(y)$, . . ., $p(u)$, . . . Die zu diesen gehörigen Darstellungsgrößen, die in der Zeichnung in cm (oder mm) abgelesen werden, und also stets die Dimension einer Länge haben, werden mit den zugehörigen großen Buchstaben, also X, Y, Z, U, . . . F, G, . . . bezeichnet. Für den „Maßstab" sei das Zeichen „m" gewählt, das jeweils als Zeiger das Zeichen für die Veränderliche oder Funktion erhält, auf die er sich bezieht. Wir schreiben also etwa für die Veränderliche x:

$$\boxed{x = m_x \cdot X} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1').$$

Das Zeichen m_x bedeutet also immer

$$m_x = \frac{m_x \text{ Einheiten der betreffenden Größe}}{1 \text{ cm}},$$

und es besagt, daß m_x Einheiten der betreffenden Größe durch 1 cm der Zeichnung dargestellt werden. Der Nenner 1 cm kann immer, wenn kein Irrtum zu befürchten ist, fortgelassen werden. Da, wie gesagt, die Darstellungsgröße X immer in cm abgelesen wird, ist die Gl. (1') auch in den Dimensionen richtig.

Die Einführung solcher Maßstabsgrößen hat sich in allen Fällen, in denen es bisher benutzt wurde, als sehr brauchbar erwiesen, da sie alle Maßstabsfragen, die bei Anwendungen zeichnerischer Verfahren auftreten, in eindeutiger Weise regelt. (Man vgl. hierzu die Lehrbücher des Verf.: Technische

[2]) G. I. Taylor: Proc. V. Intern. Congress for Appl. Mechanics Cambridge 1938, S. 294.

[3]) G. B. Schubauer: Proc. V. Intern. Congress for Appl. Mechanics Cambridge 1938, S. 321.

[4]) H. L. Dryden: NACA-Report No. 581 (1937).

Mechanik, Bd. I. 2. Aufl. 1930, Bd. II 1936 und Ebene Getriebelehre, 1932, alle drei im Verlage Julius Springer, Berlin.) Hier soll über ihre Anwendung in der Nomographie berichtet werden.

2. Fluchtliniennomogramm für drei parallele Leitern. Gegeben sei eine Funktion z von zwei Veränderlichen x, y in der Form

$$z = \varphi(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

für die ein Fluchtliniennomogramm entworfen werden soll. Bekanntlich ist es einer solchen Funktion $\varphi(x, y)$ nicht immer von vorneherein anzusehen, ob sie durch drei parallele Leitern „nomographiert" werden kann. Es ist hierzu die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \left[\log\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]}{\partial x \, \partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

notwendig und hinreichend. Die Gl. (2) ist dann in der Form darstellbar

$$h(z) = f(x) + g(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

an die wir unsere Betrachtungen anknüpfen.

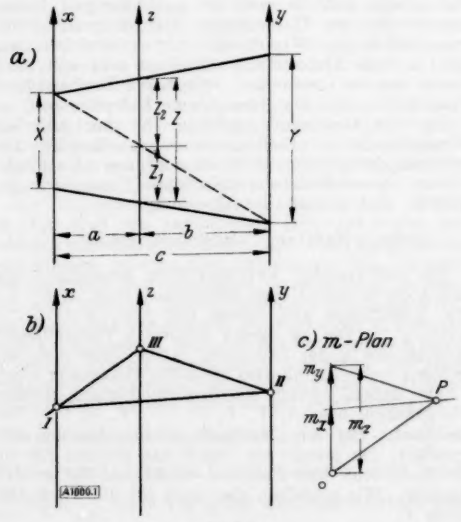


Bild 1.

Ein Fluchtliniennomogramm beruht auf der folgenden elementargeometrischen Beziehung (Bild 1a): Hat man drei parallele Gerade x, y, z in den Abständen a, b, $c = a + b$, auf denen zwischen zwei „Transversalen" die „Darstellungsgrößen" X, Y, Z als Strecken aufgetragen sind, so gilt, da $Z = Z_1 + Z_2$, $Z_1 = X\,b/c$, $Z_2 = Y\,a/c$, für gleichgerichtete Skalen

$$Z = \frac{b}{c} X + \frac{a}{c} Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Es liege die Aufgabe vor, für die Gl. (4) ein Fluchtliniennomogramm zu entwerfen, wenn gegeben sind:

I. der darzustellende Bereich für x:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

und die gewünschte Länge der Skala X^* (cm),

II. der darzustellende Bereich für y:

$$y_1 \leqq y \leqq y_2$$

und die Skalenlänge Y^* (cm), und

III. der Abstand der beiden Skalen voneinander, c.

Der Vorgang ist dann folgender: Man berechne für die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ die „Maßstäbe"

$$m_x = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{X^*}, \qquad m_y = \frac{g(y_2) - g(y_1)}{Y^*} \quad (6).$$

Da an den Skalen stets die Werte der Veränderlichen x, y, . . . selbst und nicht die der Funktionen $f(x)$, $g(y)$, . . . angeschrieben werden, so werden auch die Maßstäbe einfach mit m_x, m_y, . . . und nicht mit m_f, m_g, . . . bezeichnet, wie es eigentlich sein sollte.

Die Gleichungen (4) und (5) können dann so geschrieben werden:

$$m_z H = m_x F + m_y G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'),$$

und

$$H = \frac{b}{c} F + \frac{a}{c} G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5').$$

Sie sind miteinander verträglich, sobald

$$\frac{m_x}{m_z} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{m_y}{m_z} = \frac{a}{c}$$

ist, und daraus folgt (wegen $c = a + b$)

$$m_z = m_x + m_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

und weiter

$$a = c\,\frac{m_y}{m_x + m_y}, \qquad b = c\,\frac{m_x}{m_x + m_y}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{m_y}{m_x} \quad (II).$$

Durch die Gl. (1) ist der Maßstab für die z-Skala, durch Gl. (2) ihre Lage gegenüber den Skalen für die Funktionen f und g festgelegt.

Dadurch sind nun alle Größen bestimmt, um beliebig viele Punkte aller drei Skalen zeichnen zu können. Die Darstellungsgrößen für irgendwelche Zwischenwerte x, y, z der unabhängigen Veränderlichen sind gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{f(x) - f(x_1)}{m_x}, \qquad G = \frac{g(y) - g(y_1)}{m_y}, \\ & \qquad H = \frac{h(z) - h(z_1)}{m_z} \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Man hat nur noch den Anfangspunkt der z-Skala festzulegen; der Wert $z = z_1$ ergibt sich aus Gl. (4) für $x = x_1$, $y = y_1$ und liegt im Schnitt der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1 mit dem Träger der z-Skala, die den Abstand c nach Gl. (2) im Verhältnis m_x/m_x teilt. Weitere Punkte der drei Skalen werden in geeigneter Zahl aus Gl. (7) berechnet.

3. Mechanische Deutung der Gleichungen (I) und (II). Aus der Form dieser Gleichungen erkennt man unmittelbar, daß der Maßstab m_z der z-Skala die „Summe" der Maßstäbe m_x und m_y auf den x- und y-Skalen sind, wenn diese auf ihren Leitern als „Kräfte" aufgetragen werden. Es gilt daher der folgende Satz:

Man stelle die Maßstäbe m_x und m_y als „Kräfte" dar, die in den Trägern der x- und y-Skalen liegen; dann ist der Maßstab m_z für die Funktion $h(z)$, die mit den Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ durch Gl. (4) verbunden ist, nach Lage und Betrag die aus m_x und m_y gebildete „Summe". Die Festlegung der z-Skala auf ihrem Träger erfolgt in der oben angegebenen Weise. Die Bezeichnung „Maß-Stab" erhält durch diesen Satz einen bemerkenswerten Doppelsinn.

Dieser Satz wurde zunächst nur für gleichgerichtete Skalen abgeleitet; er behält aber seine Gültigkeit auch für entgegengesetzt gerichtete Skalen bei, sofern man dem anders gerichteten „Maßstab" das negative Zeichen zuordnet. Die Ermittlung des Trägers für die z-Skala geschieht dann praktisch durch ein Krafteck und Seileck, wie in Bild 1 b) und c) angedeutet.

4. Erweiterung auf mehrere Funktionen. Man erkennt ferner, daß die vorhergehenden Betrachtungen ohne weiteres auf Gleichungen übertragbar sind, die beliebig viele Funktionen in additiver Weise verbinden:

$$h(z) = f(x) + g(y) + p(u) + q(v) + \cdots \quad (8).$$

Für jede Veränderliche sei wieder der Wertbereich und die gewünschte Skalenlänge vorgeschrieben, so daß die bezüglichen Maßstäbe wie zuvor berechnet werden können. Sind ferner die Lagen der Skalen für die Veränderlichen $x, y, u, v, \ldots$ in der Zeichenfläche gewählt bzw. ermittelt, so ergibt sich der „Maßstab" m_z als Summe der Maßstäbe $m_x, m_y, m_u, m_v, \ldots$ in der Form

$$\boxed{m_z = m_x + m_y + m_u + m_v + \cdots} \quad . \quad (III).$$

Der Träger der z-Skala ergibt sich als „Summe" der in jenen Geraden liegenden Einzel-Maßstäben $m_x, m_y, m_u, m_v, \ldots$ durch ein Krafteck und Seileck wie zuvor.

5. Ein Beispiel für logarithmische Skalen. Hat die gegebene Funktion, die zu „nomographieren" ist, die Produktform

$$z = x^\alpha y^\beta \ldots\ldots \quad (9),$$

so geht sie durch Logarithmieren unmittelbar in die Form (4) über:

$$\log z = \alpha \log x + \beta \log y \ldots\ldots \quad (10)$$

und ist dann unmittelbar dem angegebenen Verfahren zugänglich. Wir geben die Ausführung sogleich an einem praktischen Beispiele:

Die indizierte Leistung einer einfach-wirkenden Kolbenmaschine gemäß der Gleichung

$$N_i\,(\mathrm{PS}) = \frac{p_i V n}{450} \ldots\ldots \quad (12).$$

Gegeben seien die Wertbereiche für den

Mitteldruck: $1 \leqq p_i \leqq 10\ (\mathrm{kg/cm^2})$,

Zylinderinhalt: $0{,}1 \leqq V \leqq 10\ (\mathrm{Liter})$,

die Drehzahl $50 \leqq n \leqq 5000\ (\mathrm{U/min})$.

Die Längen der Skalen sollen 17,5 cm betragen. Dann sind die Maßstäbe der drei Skalen

$$m_{p_i} = \frac{\log 10 - \log 1}{17{,}5} = \frac{1}{17{,}5\ \mathrm{cm}},$$

$$m_V = \frac{\log 10 - \log 0{,}1}{17{,}5} = \frac{2}{17{,}5\ \mathrm{cm}},$$

$$m_n = \frac{\log 5000 - \log 50}{17{,}5} = \frac{2}{17{,}5\ \mathrm{cm}},$$

und es folgt nach Gl. (III)

$$m_{N_i} = m_{p_i} + m_V + m_n = \frac{5}{17{,}5\ \mathrm{cm}}.$$

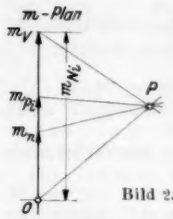


Bild 2.

Die Lage des Skalenträgers für N_i ist durch ein Seileck I—IV gegeben, das nach den aus der Statik bekannten Methoden mit den drei Maßstäben m_{p_i}, m_V, m_n als „Kräften" gezeichnet wird, und in Bild 2 als „m-Plan" angegeben ist. Dieses Seileck dient sofort auch zur Ermittlung der Lage der (unbezifferten) Hilfsleiter A, von denen bekanntlich je eine für jede Funktion bei mehr als dreien erforderlich ist. (In Bild 3 ist alles auf ½ verkleinert.) —

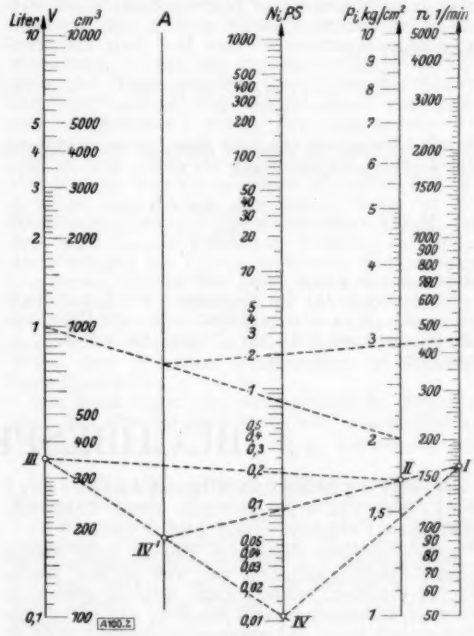


Bild 3.

Zusammenfassung. Durch Einführung der „Maßstäbe" ist es in einfacher Weise möglich, Fluchtlinientafeln von vorgegebener Größe und für vorgeschriebene Wertebereiche der auftretenden Funktionen zu entwerfen; dabei werden die Methoden der elementaren Statik — Krafteck und Seileck — verwendet. Die Methode ist u. a. auch für Nomogramme mit drei Leitern, die durch einen Punkt gehen (Strahlentafeln), anwendbar.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 100

Über die partielle Ableitung der Besselschen Funktionen nach ihrem Parameter. Im Anschluß an meinen im Februarheft 1939 in der Z. angew. Math. Mech. erschienenen Aufsatz soll gezeigt werden, daß sich die Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} Y_\nu(z)$$

für ganzzahlige positive oder negative Indizes ν auf elementare Besselsche Funktionen zurückführen lassen.

Aus der Funktionalgleichung

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = 2\nu \frac{J_\nu}{z}$$

gewinnt man durch partielles Differenzieren nach ν die Beziehung

$$J^*(z, \nu - 1) + J^*(z, \nu + 1) = \frac{2\nu}{z} J^*(z, \nu) + 2\frac{J_\nu}{z} \quad (1),$$

wobei $\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z)\Big|_{\nu=p}$ mit $J^*(z,p)$ bezeichnet ist. Bekanntlich ist

$$J^*(z,1) - J^*(z,-1) = \pi\, Y_1(z) \quad . \quad . \quad (2).$$

Setzt man in (1) $\nu = 0$ und addiert bzw. subtrahiert dazu die Gl. (2), so ergibt sich

$$J^*(z,1) = \frac{J_0(z)}{z} + \frac{\pi}{2}\, Y_1(z) \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$J^*(z,-1) = \frac{J_0(z)}{z} - \frac{\pi}{2}\, Y_1(z) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Außerdem gilt

$$J^*(z,0) = \frac{\pi}{2}\, Y_0(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Gl. (2) und (5) ergeben sich aus der Definition der Funktion $Y_n(z)$ durch

$$Y_n(z) = \lim_{\lambda \to n} \frac{J_\lambda(z)\cdot\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(z)}{\sin\lambda\pi} \quad . \quad . \quad (6),$$

wobei n eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man in (1) der Reihe nach $\nu = 1, 2 \ldots$ bzw. $\nu = -1, -2, \ldots$, so ergeben sich mit Hilfe von (3), (4), (5) Ausdrücke für $J^*(z,\nu)$ für $\nu = 2, 3 \ldots$, bzw. für $\nu = -2, -3, \ldots$.

Weiter ist

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \nu} J_\nu(z) = \frac{1}{2}\,(J^*(z,\nu-1) - J^*(z,\nu+1)) \quad (7).$$

Um die entsprechenden Gleichungen für die Funktion $\frac{\partial}{\partial \nu} Y_\nu(z) \equiv Y^*(z,\nu)$ aufzustellen, wobei

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

ist, hat man in (1) J durch Y, in (6) ebenfalls J durch Y, jedoch Y durch $-J$ zu ersetzen. Dann findet man

$$Y^*(z,0) = -\frac{\pi}{2}\, J_0(z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$Y^*(z,1) = \frac{Y_0(z)}{z} - \frac{\pi}{2}\, J_1(z) \quad . \quad . \quad (9),$$

$$Y^*(z,-1) = \frac{Y_0(z)}{z} + \frac{\pi}{2}\, J_1(z) \quad . \quad . \quad (10).$$

Die Ausdrücke für $Y^*(z,\nu)$ ergeben sich aus der zu (1), diejenigen für $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \nu} Y_\nu(z)$ aus der zu (7) analogen Gleichung.

Berlin. Reinhard Müller. 117

BUCHBESPRECHUNGEN

STEPHEN **TIMOSHENKO,** 60th Anniversary Volume. VIII + 277 S. New York 1938, The Macmillan Company. Preis geb. 5 Dollar.

Eine gelungene Festschrift gleicht einem Strauß bunter Feldblumen: nicht nur weil sie den Zweck hat zu erfreuen, sondern auch, weil sie gerade so bunt ist, zusammengesucht aus dem, was gerade die Gelegenheit bietet und zusammengehalten nur durch ein leichtes Band, die Zugehörigkeit zum weiten Arbeitsgebiet des Gefeierten. So stehen auch hier in fröhlichem Durcheinander 29 große und kleine Aufsätze, die Schüler und Freunde Timoshenkos zu seinen Ehren zusammengetragen haben: Arbeiten über Plattenstatik und Stabilität, über Schwingungen, über Plastizität und Kriechen und viele andere Dinge aus der Ingenieurmechanik, manche von ihnen Untersuchungen zu irgendeinem kleinen Einzelproblem, wie die von Biezeno und Koch über die Knickung eines durchlaufenden Plattenstreifens oder von Goodier über Spannungen in Preßsitzen, andere Beiträge zu Fragen, die in den letzten Jahren in der Literatur viel diskutiert worden sind, wie der Aufsatz von Donnell über die Southwellsche Auswertung von Knickversuchen, oder die von Hetényi über Trägerroste, andere wieder zusammenfassende und ergänzende Rückblicke über frühere Untersuchungen ihrer Verfasser, wie der von Prandtl über unelastische Formänderungen, von Taylor über Kristallplastizität, von Weibel über Spannungsoptik oder Ergänzungen und Weiterführungen, wie der von Huber über anorthotrope Platten. So findet jeder, der irgendwo auf Timoshenkos weitem Arbeitsgebiet tätig ist, in diesem kunterbunten Buch einen klugen Gedanken oder eine Anregung für seine eigene Arbeit, und das Schaffen des Mannes, dessen 60. Geburtstag wir unlängst gefeiert haben, zieht hier in den Arbeiten seiner Schüler und Freunde noch einmal an uns vorüber.

Berlin-Adlershof. W. Flügge. 137

Professor Dr. GEORG **JOOS,** Direktor d. II. Phys. Inst. d. Universität Göttingen, Lehrbuch der Theoretischen Physik. 3. Aufl. XVIII + 704 S. m. 176 Fig. Leipzig 1939, Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 24 M.

Das vielbenutzte Lehrbuch liegt jetzt in dritter Auflage vor. Daß nach den Auflagen von 1932 und 1934 jetzt eine neue erforderlich geworden ist, ist ein Beweis für die Beliebtheit, die sich das Buch zu erhalten gewußt hat, und die es seiner Klarheit, Vollständigkeit und Knappheit verdankt. Weitere Worte des Lobes erscheinen nach den Besprechungen der früheren Auflagen in dieser Zeitschrift — Bd. 12 (1932) S. 384/385 und Bd. 16 (1936) S. 126 — überflüssig. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß die Änderungen gegenüber der letzten Auflage insbesondere in einer Vervollständigung der Ausführungen über Kernphysik sowie in einer Umarbeitung und Präzisierung der Darlegungen über den Nernstschen Wärmesatz und die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes bestehen. Außerdem hat jetzt neben dem c. g. s.-System für die Makroelektrodynamik auch das sog. Giorgische Maßsystem Verwendung gefunden, das als Grundmaße m, kg, sec, Am und V benutzt.

Berlin. E. Mosch. 996

HEINZ **PRÜFER,** weil. a. o. Prof. a. d. Universität Münster i. W., Projektive Geometrie, aus dem Nachlaß herausgegeben von Studienassessor G. Fleddermann und Prof. G. Köthe m. einem Vorwort von Prof. v. d. Waerden. VIII + 314 S. m. 254 Abb. Leipzig 1939, Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 9.50 M.

Ausgehend von der Anschauung und niemals den Zusammenhang mit ihr verlierend, dabei aber allen logischen Anforderungen Rechnung tragend, entwickelt das prächtige Buch einen Lehrgang der

projektiven Geometrie, der das Wesen ihres Aufbaues, die Wirksamkeit ihrer Methoden und die Bedeutung ihrer Ergebnisse mit voller Klarheit erkennen läßt. Der Umfang, in dem die letztgenannten aufgenommen sind, läßt sich dadurch kennzeichnen, daß er gerade notwendig ist für das Verständnis der theoretischen und praktischen Ausstrahlungen der projektiven Geometrie, die ebenfalls mit voller Sorgfalt begründet und dargestellt werden. Es handelt sich hierbei um den gruppentheoretischen Aufbau der gesamten Geometrie — um die Einordnung der Orthogonalmetrik auf Grund der Axiome entweder der Rechtwinkeligkeit oder der Kongruenz — um die nicht-euklidische Geometrie und ihr projektives Modell — um die darstellende Geometrie mit dem Ausgang von der projektiven Verallgemeinerung des Zweitafelsystems — um die Möglichkeit analytischer Behandlung auf Grund der projektiven Koordinaten. Hierüber hinaus aber wird der Leser in den Stand gesetzt, sich ohne weiteres in die umfangreichen älteren Werke und in Sonderuntersuchungen hineinzufinden; er muß nur die Übereinstimmung der dort gebrauchten Begriffe des Wurfes und des Doppelverhältnisses mit dem hier eingeführten Begriff des Skalares (abcd) beachten. Das Buch, dessen Verfasser der deutschen Wissenschaft zu früh entrissen worden ist, wird die alten Freunde der projektiven Geometrie erfreuen und ihr neue Freunde erwerben.

Dresden. W. Ludwig. 112

ERNST AUGUST **WEISS,** a. o. Prof. a. d. Rhein. Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn, Punktreihengeometrie. VIII + 232 S. m. 29 Abb. Leipzig und Berlin 1939, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 14 M.

Das Buch bezweckt eine Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume und die Entwicklung des dazu erforderlichen Rüstzeugs, der symbolischen Methode der Invariantentheorie. Auch heute noch stehen viele Mathematiker, selbst Geometer, sowohl dem Stoff als auch der Methode vielfach ablehnend gegenüber. Das Studium des vorliegenden Buchs wird sie bekehren, wenn sie sehen, wie die Fragestellungen des „anschaulichen" projektiven Raumes durch Deutung in einem R_n sich wesentlich klären und wie die sachgemäße Anwendung des symbolischen Verfahrens den Rechenaufwand auf ein Mindestmaß herabsetzt. Dies zeigt der Verfasser an dem einfachsten projektiven Gebilde, der Punktreihe. Bekanntlich können die Punkte einer Geraden einander auf ∞^3 Weisen projektiv zugeordnet werden, die der Ebene, die ∞^3 Geraden enthält, auf ∞^5 Arten, und im Raume gibt es auf seinen ∞^4 Geraden ∞^7 Punktreihen. Und diese Mannigfaltigkeiten sind linear, können also als Punkte projektiver Räume von drei, fünf und sieben Dimensionen gedeutet werden. Wie man diese Beziehungen analytisch faßt, wie dabei alle Sonderfälle, die der „Anschauung" leicht entgehen, dabei rein herauspräpariert werden, das zu zeigen bildet den sachlichen Inhalt der Schrift. Wer sie sorgfältig durcharbeitet, lernt nicht nur einen guten Teil der projektiven Geometrie kennen, vielfach von neuen Gesichtspunkten aus, er erhält darüber hinaus neue Anregungen, sich eingehender mit einem der reizvollsten Kapitel der neueren geometrischen Forschung zu befassen. Vorausgesetzt ist nur eine gewisse Kenntnis der Grundtatsachen und der gute Wille, sich einen neuen Rechenapparat zu eigen zu machen, auch wenn man seine Nützlichkeit zunächst noch nicht so recht einsieht. Das Studium ist daher jedem Studenten anzuraten, der Neigung und Fähigkeit hat, sich mit geometrischen Fragestellungen erfolgreich zu beschäftigen.

Potsdam-Babelsberg. E. Salkowski. 116

Dr. ALFRED **BERGER,** a. o. Prof. a. d. Universität Wien, Mathematik der Lebensversicherung. VII + 275 S. Wien 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 25,50 M.

Der Verfasser, der sich durch sein zweibändiges Werk über Lebensversicherungstechnik einen sehr geachteten Namen erworben hat, behandelt im vorliegenden Buche die Nettorechnung der Lebensversicherung. Unter den hier geltenden Annahmen, daß die Verzinsung und die den Sterblichkeitsverlauf bestimmende Sterbetafel während der ganzen Versicherungsdauer unveränderlich sind, und daß Verwaltungskosten nicht erwachsen, werden mit logischer Strenge die Formeln und Sätze aus dem Grundsatze der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung entwickelt und ausgedeutet. Neben der elementaren Betrachtungsweise wird auch die analytische durchgeführt und damit ein geschlossenes Lehrgebäude errichtet, in dem die neuesten Methoden und Ergebnisse Platz finden. Ein breiter Raum ist den Versicherungswerten für verbundene Leben und der Risikotheorie gewidmet, Gebiete, auf denen der Verfasser mit eignen wertvollen Untersuchungen hervorgetreten ist. Die klare, gedankenreiche und flüssige Darstellung wird den Anforderungen einer Einführung in die Versicherungsmathematik nach jeder Hinsicht gerecht; zudem bietet das Werk dem Praktiker eine reiche, zuverlässige Formelsammlung.

Das Buch bildet eine sehr erfreuliche Bereicherung des einschlägigen deutschen Fachschrifttums.

Dresden. P. E. Böhmer. 121

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Der Keplersche Körper und andere Bauspiele. (Scientia Delectans, Gemeinverständliche Darstellungen aus der Unterhaltungsmathematik und aus verwandten Gebieten, Heft 3.) 65 S. m. 53 Textfig. u. 1 Titelbild. Leipzig 1938, Verlag K. F. Koehler. Preis brosch. 2 M.

Prof. Dr. F. **FITTING,** Panmagische Quadrate und magische Sternvielecke. (Scientia Delectans, Gemeinverständliche Darstellungen aus der Unterhaltungsmathematik und aus verwandten Gebieten, Heft 4.) 70 S. m. 69 Textfig. u. 1 Titelbild. Leipzig 1939, Verlag K. F. Koehler. Preis brosch. 3 M.

Auch die beiden neuen Hefte der hier (diese Zeitschrift Bd. 19 (1939), S. 61) schon angezeigten Sammlung von Einzelschriften aus der Unterhaltungsmathematik sind sehr fesselnd. Der Begründer der Sammlung Kowalewski knüpft an Keplersche Ideen an, indem er zu den regelmäßigen Körpern „Rhombenkleider" konstruiert. Diese sind durch Lote, von passender Höhe im Mittelpunkt der Flächen errichtet, bestimmt; für das regelmäßige Zwölf- und Zwanzigflach erhält man so den Keplerschen Körper, ein von kongruenten Rhomben begrenztes Dreißigflach. Werden die 30 Flächen mit 5 Farben gefärbt, so ergeben sich sehr interessante und schwierige Bau- und Besiedelungsspiele gruppentheoretischer Art. Von besonderem mathematischen Interesse ist die Beziehung zu mehrdimensionalen Körpern: Urbild des Rhombenzwölfflachs im vierdimensionalen Raum, des Keplerschen Körpers im sechsdimensionalen.

F. Fitting entwickelt mit Hilfe des Zweiersystems ein sehr praktisches Verfahren zur Gewinnung geradfeldiger magischer Quadrate, deren Herstellung vielfach als besonders schwierig galt. Er beschränkt sich auf panmagische oder parkett-

XUM

bildende Quadrate, d. h. eine solche Anordnung einer quadratischen Matrix a_{ik} $(i = 0, \ldots n;$ $k = 0, \ldots n)$, bei der auch die „gebrochenen" Diagonalen z. B. $a_{12} + a_{23} + \ldots + a_{78} + a_{81}$ die gleiche Summe liefern. Aus den Zahlen 0,1, . . . 63 lassen sich nach seinem Verfahren rein mechanisch weit über 40 000 andere ableiten. Nach dem gleichen Verfahren gewinnt er auch magische Sternvielecke. Jede Ecke eines regelmäßigen n-Ecks wird mit der a-ten auf sie folgenden verbunden. Auf den so entstehenden n-Seiten gibt es $p = n \cdot a$ Schnittpunkte, die durch irgendwelche Zahlen z. B. 0,1, . . . $(p-1)$ bezeichnet werden. Ist die Summe auf allen Seiten gleich, heißen die Sternvielecke (n, a) magisch.

Frankfurt/Main. W. Lorey. 993

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

ARNOLD **SOMMERFELD,** Prof. a. d. Universität München, Atombau und Spektrallinien. II. Bd. 2. umgearb. u. erweit. Aufl. d. „Wellenmechanischen Ergänzungsbandes". XI + 820 S. m. 62 Abb. Braunschweig 1939, Verlag Vieweg & Sohn. Preis geb. 35 M.

Dr.-Ing. F. **RÖTSCHER,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen, und Dr.-Ing. R. **JASCHKE,** Assist. a. d. Techn. Hochschule Aachen, Dehnungsmessungen und ihre Auswertung. VI + 121 S. m. 191 Abb. und 1 Tafel. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 16.80 M.

Dr.-Ing. habil. KURT **RAUH,** a. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen, Praktische Getriebelehre. II. Bd. VIII + 298 S. m. 709 Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 29.40 M.

ERWIN **LOHR,** Prof. a. d. Deutschen Techn. Hochschule Brünn, Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. („Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften.") XV + 411 S. m. 34 Fig. Berlin 1939, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 18 M.

Oberbaurat Dr.-Ing. ehr. FRITZ von **EMPERGER,** Stahlbeton mit vorgespannten Zulagen aus höherwertigem Stahl. VI + 38 S. m. 22 Abb. Berlin 1939, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 4,40 M.

Professor Dr. J. **PETERS,** Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen. 2. Aufl. VII + 293 S. Bonn und Berlin 1939, Verlag Ferdinand Dümmler. Preis geb. 32,40 M.

Dr. KARL **GEY,** Oberstudiendirektor in Leipzig, Dr. habil. HORST **TEICHMANN,** Dozent für Physik a. d. Techn. Hochschule, Dresden, Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). (Math.-Phys. Bibl., Reihe II, Abrisse aus dem Gebiete der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften.) III. verbesserte und erweiterte Aufl. 128 S. m. 69 Fig. u. 2 Tafeln. Leipzig und Berlin 1939, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 3,60 M.

GABOR **SZEGÖ,** Prof. a. d. Stanford Univ., Orthogonal Polynomials. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.) 401 S. New York 1939, American Mathematical Society. Preis 6 Dollar.

A. ADRIAN **ALBERT,** Associate Professor a. d. Universität Chicago, Structure of Algebras. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIV.) XI + 210 S. New York 1939, American Mathematical Society. Preis 4 Dollar.

C. B. **BIEZENO,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Delft, R. **GRAMMEL,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Technische Dynamik. XII + 1056 S. m. 667 Abb. u. 5 Anhängen. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 78 M.

Kalender der Technik 1940. Berlin 1940, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 2,25 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Eintägige wissenschaftliche Tagung.

Im Frühjahr 1940 ist eine Zusammenkunft des Vorstandsrates in Braunschweig geplant. Bei dieser Gelegenheit wird wahrscheinlich eine eintägige wissenschaftliche Tagung stattfinden.

Ortsgruppe Berlin.

Am 25. Mai 1938 fand ein Besuch der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Adlershof statt.

Ferner sprachen in den Sitzungen

am 22. Februar 1939 Herr Schmidt, Berlin, „Über neuere Arbeiten zur Prandtlschen Tragflügeltheorie",

am 29. März 1939 die Herren Maruhn und Schubert, Berlin, „Über einige Verfahren zur Bestimmung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln".

Alle Veranstaltungen fanden gemeinsam mit der Berliner Mathematischen Gesellschaft statt. 143

Persönliches.

Ernannt wurden:

der Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium in Berlin-Potsdam Dr. P. ten Bruggencate zum a. o. Prof. der Astronomie an der Universität Berlin,

der Dozent an der Univ. Rostock Dr. F. Lösch zum o. Prof. für Mathematik an dieser Universität,

der Dozent an der Techn. Hochschule Braunschweig Dr. Fr. Rehbock zum o. Prof. für angewandte Mathematik und Darstellende Geometrie an dieser Hochschule,

der nicht beamtete a. o. Prof. an der Univ. Greifswald Dr. G. Hoheisel zum o. Prof. für Mathematik an der Univ. Köln,

der o. Prof. an der Techn. Hochschule Graz Dr. J. Krames zum o. Prof. für Darstellende Geometrie an der Techn. Hochschule Wien,

Prof. Dr. A. Huber zum o. Prof. für Mathematik an der Universität Wien,

der Dozent an der Techn. Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. habil. K. Klotter als Nachfolger des verstorbenen Prof. W. Hort zum Prof. für mechanische Schwingungen und Maschinendynamik an der Techn. Hochschule Berlin und zum Leiter der Abt. Mechanik am Institut für Schwingungsforschung.

Es verstarb der frühere o. Prof. für Astronomie und Vererbungswissenschaft an der Univ. Frankfurt a. M. Dr. M. Brendel.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany.
Copyright 1939 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.